35 Matrixschreibweise für lineare Abbildungen

35.1 Motivation

- Wir haben gesehen, dass lineare Abbildungen sich durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren ausdrücken lassen.
- Mithilfe von Matrizen können wir dies kompakt aufschreiben und die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen elegant berechnen.

35.2 Struktur linearer Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen

Es sei K ein Körper (meistens $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann ist

$$f: \quad K^n \to K^m , \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

eine lineare Abbildung: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + a_{1n}(\lambda x_n + \mu y_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + a_{mn}(\lambda x_n + \mu y_n) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \; . \end{aligned}$$

Umgekehrt besitzt jede lineare Abbildung von K^n nach K^m diese Struktur, da nach 34.9 eine lineare Abbildung von K^n in einen anderen Vektorraum durch die Bilder der Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$ eindeutig bestimmt ist. Sind diese Bilder durch $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$ gegeben, so folgt, dass $(*)$ die entsprechende lineare Abbildung ist. Diese Struktur gibt Anlass zur nachfolgenden Definition.

35.3 Definition: Matrix

Es sei K ein Körper. Das rechteckige Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ heißt $\boldsymbol{m \times n}$**-Matrix** über K. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K bezeichnen wir mit $K^{m \times n}$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ heißen **Spaltenvektoren** von A; $(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ heißen **Zeilenvektoren** von A.

Die Matrix A wird auch als (a_{ij}) geschrieben. Dabei bildet i den **Zeilenindex** (bleibt innerhalb jeder Zeile konstant) und j den **Spaltenindex** (innerhalb jeder Spalte konstant).

35.4 Matrizen spezieller Gestalt

a) **Quadratische Matrizen:** Eine $n \times n$-Matrix heißt **quadratisch.** Dagegen heißen $m \times n$-Matrizen mit $m \neq n$ **nichtquadratisch.**

b) **Diagonalmatrizen:** Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$, bei der $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $i \neq j$ gilt (also nur Diagonaleinträge a_{ii} von Null verschieden sein dürfen), heißt Diagonalmatrix.

c) **Dreiecksmatrizen:** Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$, bei der $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $i > j$ gilt (also nur auf der Diagonale und darüber von Null verschiedene Einträge stehen dürfen), heißt **obere Dreiecksmatrix.**

Gilt $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $i < j$, so spricht man von einer **unteren Dreiecksmatrix.**

35.5 Matrix-Vektor-Produkt

Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in K^m$, so schreiben wir statt

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

jetzt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } x} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } c},$$

also kurz: $A\,x = c$.

Eine solche Schreibweise ist sowohl für lineare Abbildungen nützlich als auch für lineare Gleichungssysteme (spätere Vorlesungen: Kapitel **??**, **??**). Sie definiert das **Produkt** zwischen einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ und einem Vektor $x \in K^n$ als $Ax = c$ mit $c \in K^m$ und

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ , \qquad i = 1, \ldots, m \ .$$

Jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ kann also geschrieben werden als

$$f(x) = Ax \quad \text{mit } A \in K^{m\times n}.$$

Die Spalten von A sind dabei die Bilder der Basisvektoren.

35.6 Beispiele für lineare Abbildungen in Matrixschreibweise

a) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

wird beschrieben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\2 & -4 & 1\end{pmatrix} x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

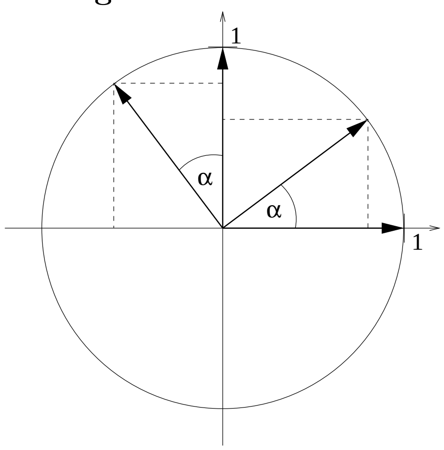
also z. B.

$$x = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\2 & -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1\\2\cdot 2 - 4\cdot 3 + 1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-7\end{pmatrix}.$$

b) **Streckung**

Die Matrix $A = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet einen Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ab.

c) **Drehung in $\mathbb{R}^2$**



$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$$

Die Matrix der Drehung um einen Winkel α lautet demnach

$$A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

(Drehungen werden dabei gegen den Uhrzeigersinn durchgeführt.)

d) **Spiegelung an der x_1-Achse in $\mathbb{R}^2$**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bewirkt offenbar eine Spiegelung an der x_1-Achse.

e) **Drehung in $\mathbb{R}^3$**

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung in der x_1-x_3-Ebene (entlang der x_2-Achse geschieht nichts).

f) **Translationen**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

sind *keine* linearen Abbildungen.

Welche Verknüpfungen lassen sich mit Matrizen ausführen?

35.7 Definition

Es sei K ein Körper.

a) Die **skalare Multiplikation** einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ mit einem Skalar $\lambda \in K$ erfolgt komponentenweise:

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \ .$$

b) Die **Addition** zweier Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in K^{m\times n}$ erfolgt komponentenweise:

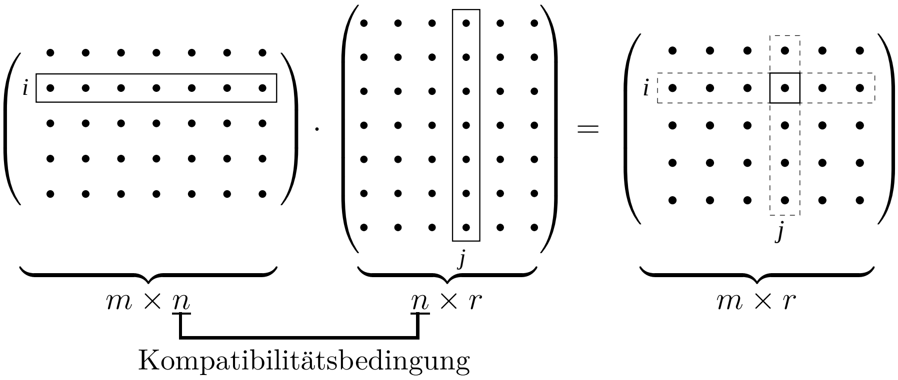
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \ .$$

c) Die **Multiplikation** zweier Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in K^{n\times r}$ definiert man als

$$A \cdot B = C \in K^{m\times r} \ ,$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ .$$

Bemerkung: Die Matrixmultiplikation erfolgt also „Zeile mal Spalte“:



Nur zueinander „passende“ Matrizen (Kompatibilitatsbedingung: Spaltenzahl der ersten = Zeilenzahl der zweiten Matrix) können miteinander multipliziert werden.

35.8 Beispiele

(In diesen Beispielen ist stets $K = \mathbb{R}$.)

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9 \\ 4 \cdot 6 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 8 & 4 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 7 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$.

Welche Rechenregeln ergeben sich aus 35.7?

35.9 Satz: Eigenschaften der Matrixoperationen

Es sei K ein Körper. Dann gilt:

a) $K^{m \times n}$ ist ein Vektorraum:

- $(K^{m\times n}, +)$ ist eine kommutative Gruppe
  - Assoziativgesetz: $(A+B)+C = A+(B+C)$
  - neutrales Element: $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$
  - inverses Element zu A ist $-A = (-1)A$
  - Kommutativgesetz: $A+B = B+A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $1 \cdot A = A$
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

b) $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins:

- $(K^{n\times n}, +)$ ist eine kommutative Gruppe
- $(K^{n\times n}, \cdot)$ ist ein Monoid:
  - Assoziativgesetz: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
  - neutrales Element: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$
- Distributivgesetze:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$
$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

35.10 Bemerkungen

a) Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 1\cdot 4 & 2\cdot 3 + 1\cdot 6 \\ 7\cdot 5 - 4\cdot 4 & 7\cdot 3 - 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 3\cdot 7 & 5\cdot 1 - 3\cdot 4 \\ 4\cdot 2 + 6\cdot 7 & 4\cdot 1 - 6\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -7 \\ 50 & -20 \end{pmatrix}$$

b) Ebenso besitzt eine $n \times n$-Matrix im Allgemeinen *keine* Inverse bezüglich der Matrixmultiplikation.

c) $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist nicht nullteilerfrei:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $K^{n\times m}$ ist als Vektorraum isomorph zu K^{nm}.

e) Spaltenvektoren aus K^m können als $m \times 1$-Matrizen aufgefasst werden. Vektoraddition und skalare Multiplikation sind Spezialfälle der entsprechenden Matrixoperationen. Das Matrix-Vektor-Produkt ist ein Spezialfall der Matrixmultiplikation.

f) **Satz:** Die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen entspricht der Multiplikation ihrer Matrizen:

$$\begin{array}{ccccc} K^r & \stackrel{f}{\to} & K^n & \stackrel{g}{\to} & K^m \\ & A \in K^{n\times r} & & B \in K^{m\times n} & \end{array}$$

$g \circ f : K^r \to K^m$ wird durch $B \cdot A \in K^{m\times r}$ repräsentiert.

35.11 Inverse Matrizen

Im Allgemeinen hat $A \in K^{n\times n}$ kein multiplikatives Inverses A^{-1}. In vielen Fällen existiert jedoch eine inverse Matrix.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5\cdot 4 - 2\cdot 6 & -5\cdot 6 + 6\cdot 5 \\ 2\cdot 4 - 4\cdot 2 & -2\cdot 6 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ein Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix werden wir in einer späteren Vorlesung kennen lernen.

35.12 Definition

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **invertierbar (umkehrbar, regulär),** falls eine Matrix $A^{-1} \in K^{n\times n}$ mit $AA^{-1} = I$ existiert. A^{-1} heißt **inverse Matrix** zu A.

Die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n\times n}$ wird mit $\mathrm{GL}(n, K)$ bezeichnet.

Eine nicht invertierbare Matrix wird auch als **singulär** bezeichnet.

35.13 Satz: Gruppeneigenschaft von $\mathrm{GL}(n, K)$

Die Menge $\mathrm{GL}(n, K)$ bildet mit der Matrizenmultiplikation eine multiplikative (nichtkommutative) Gruppe.

35.14 Bemerkungen

a) GL steht für *general linear group.*

b) Sind $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$, so ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, denn

$$A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I\ .$$

c) Nichtquadratische Matrizen sind niemals invertierbar. Allerdings kann man u. U. eine so genannte *Pseudoinverse* angeben (spätere Vorlesung).

d) Die Invertierbarkeit einer Matrix entspricht der Bijektivität der zugehörigen linearen Abbildung.

   Nach dem Beweis von Satz 34.10 ist eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen genau dann bijektiv, wenn Basen auf Basen abgebildet werden.

   Daraus folgt: $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren von A eine Basis des K^n bilden.