39 Determinanten

39.1 Motivation

- Wir stellen uns das Ziel, wesentliche Information über
  - die Invertierbarkeit einer $n \times n$-Matrix
  - das Lösungsverhalten zugehöriger linearer Gleichungssysteme

  möglichst kompakt auszudrücken: durch eine einzelne Zahl.
- Wir definieren also eine K-wertige Funktion auf Matrizen $A \in K^{n\times n}$.
- Determinanten haben auch eine geometrische Bedeutung: Volumenbestimmung eines Parallelepipeds

39.2 Definition

Es sei K ein Körper. Eine Abbildung $\det : K^{n\times n} \to K$ heißt **Determinantenfunktion,** falls gilt:

a) det ist linear in jeder Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ \lambda z_i + \mu z_i' \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i' \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $\lambda, \mu \in K$.

(Man sagt auch: Die Determinante ist eine **Multilinearform.**)

b) Ist $\operatorname{rang} A < n$, so ist $\det A = 0$.

c) $\det I = 1$ für die Einheitsmatrix $I \in K^{n\times n}$.

Beachte: Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.

Gibt es viele Determinantenfunktionen? Nein!

39.3 Satz: Eindeutigkeit der Determinante

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Determinantenfunktion $\det : K^{n\times n} \to K$.

Mit anderen Worten: Die Forderungen (a)–(c) aus Definition 39.2 stellen eine axiomatische Fundierung des Determinantenbegriffs dar.

Der Beweis des Satzes ist aufwändig (siehe z. B. Beutelspacher).

Wie berechnet man Determinanten? Hierzu betrachten wir zunächst nur 2×2-Matrizen.

39.4 Satz: Determinante einer 2 × 2-Matrix

Die Determinante einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ ist gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,. \qquad (*)$$

Beweis: Die Abbildung $(*)$ erfüllt die Bedingungen (a)–(c) aus Definition 39.2:

a)

$$\begin{aligned} \det & \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_2)d - (\lambda b_1 + \mu b_2)c \\ &= \lambda a_1 d + \mu a_2 d - \lambda b_1 c - \mu b_2 c \\ &= \lambda (a_1 d - b_1 c) + \mu (a_2 d - b_2 c) \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Die Linearität in der 2. Zeile zeigt man analog.

b) Wenn die Matrix nur aus Nullen besteht, so ist die Determinante 0. Hat die Matrix Rang 1, so ist $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, d. h.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{pmatrix} = \lambda bd - \lambda bd = 0 \ .$$

c) Es gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$ □

Bemerkung: Für eine 1×1-Matrix $a \in K^{1\times 1}$ ist $\det(a) = a$.

Determinanten für $n \times n$-Matrizen lassen sich rekursiv auf 2×2-Determinanten zurückführen. Dazu benötigen wir noch zwei Begriffe.

39.5 Definition

Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Die aus einer $n\times n$-Determinante $D = \det A$ durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehende $(n-1)\times(n-1)$-Determinante D_{ij} nennen wir **Unterdeterminante** von D. Der Ausdruck $A_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ heißt **algebraisches Komplement** des Elements a_{ij} in der Determinante D.

39.6 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & \boxed{4} \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} , \qquad \begin{aligned} D_{23} &= \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-2) \cdot 9 = 42 \\ A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = -42 \ . \end{aligned}$$

Damit können wir $n \times n$-Determinanten rekursiv berechnen.

39.7 Satz: Laplace'scher Entwicklungssatz

Der Wert einer $n \times n$-Determinante ergibt sich, indem die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit ihren algebraischen Komplementen multipliziert und die so entstandenen Produkte addiert werden.

Die **Entwicklung nach der i-ten Zeile** lautet also

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ .$$

Entwickelt man nach der j-ten Spalte, so erhält man

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ .$$

39.8 Beispiel

a) Entwicklung einer 3×3-Determinante nach der 2. Zeile:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (63 - 8) + 5 \cdot (21 + 2) - 4 \cdot (24 + 18) \\ &= -2 \cdot 55 + 5 \cdot 23 - 4 \cdot 42 = -163 \ . \end{aligned}$$

b) Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (16 + 10) - 4 \cdot (24 + 18) + 7 \cdot (15 - 18) \\ &= 1 \cdot 26 - 4 \cdot 42 + 7 \cdot (-3) = -163 \ . \end{aligned}$$

Wie rechnet man mit Determinanten?

39.9 Rechenregeln für Determinanten

a) Transposition verändert den Wert einer Determinante nicht:

$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A \ .$$

(Folgt aus dem Laplace'schen Entwicklungssatz, indem man die Entwicklung nach Zeilen und Spalten vertauscht.)

b) Aus Definition 39.2(b) folgt: Sind Spaltenvektoren oder Zeilenvektoren linear abhängig, so ist die Determinante 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

c) Addiert man zu einer Zeile/Spalte das Vielfache einer anderen Zeile/Spalte, so bleibt die Determinante gleich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -1\times & \\ & -1\times \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

d) Vertauscht man zwei Zeilen/zwei Spalten, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{vmatrix} \, .$$

e) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) \cdot 2 = -42 \, .$$

(Folgt durch rekursives Anwenden des Laplace'schen Entwicklungssatzes.)

Insbesondere kann man mit dem Gauß-Algorithmus die Matrix auf Dreiecksgestalt bringen (unter Beachtung von (d)) und kann dann ihre Determinante bequem berechnen. Für große n ist dies wesentlich effizienter als der Laplace'sche Entwicklungssatz.

f) Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \, .$$

g) *Folgerung:* Falls A invertierbar, so $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$, also

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \, .$$

h) *Vorsicht:* Für $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

(und nicht etwa $\dots = \lambda \det A$, denn det ist linear *in jeder Zeile*).

Wozu sind Determinanten nützlich?

39.10 Bedeutung der Determinanten

a) Mit Determinanten kann man prüfen, ob eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ invertierbar ist:

$$A \in K^{n\times n} \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

(vgl. Definition 39.2(b)).

b) Man kann mit ihrer Hilfe lineare Gleichungssysteme lösen (für numerische Rechnungen ist dieses Verfahren allerdings zu ineffizient!):

Cramersche Regel: Ist $A = (a_{*1}, \dots, a_{*n}) \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $b \in K^n$, so lässt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ angeben durch

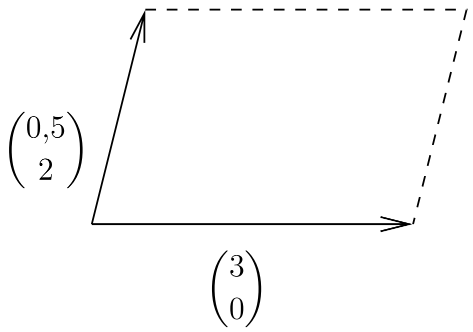
$$x_k = \frac{\det(a_{*1}, \dots, a_{*(k-1)}, \boldsymbol{b}, a_{*(k+1)}, \dots, a_{*n})}{\det A}, \quad k = 1, \dots, n\,.$$

Beispiel: Für das System $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ erhält man

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8-30}{8-5} = -\frac{38}{3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12+2}{3} = \frac{14}{3}\,.$$

c) $|\det A|$ ist das Volumen des durch die Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelepipeds:



$$\left|\det\begin{pmatrix}3 & 0{,}5\\0 & 2\end{pmatrix}\right| = |3\cdot 2 - 0\cdot 0{,}5| = |6| \quad \text{Parallelogrammfläche}$$