40 Euklidische Vektorräume, Skalarprodukt

40.1 Motivation

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann das Skalarprodukt zweier Vektoren gebildet werden. Mit seiner Hilfe lassen sich Längen von Vektoren bestimmen sowie feststellen, ob Vektoren senkrecht (orthogonal) zueinander sind; allgemein können auch Winkel zwischen Vektoren berechnet werden.

Ziel: Wir wollen dieses Konzept auf andere Vektorräume über $\mathbb{R}$ ausdehnen und auch in diesen ein Skalarprodukt bereit stellen, Orthogonalität definieren, Längen und Winkel bestimmen.

40.2 Definition: euklidischer Raum

Es seien $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ und $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Das **euklidische Produkt (euklidische Skalarprodukt)** $u \cdot v$ wird definiert durch

$$u \cdot v := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \; .$$

Den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem euklidischen Produkt bezeichnet man als ***n*-dimensionalen euklidischen Raum.**

40.3 Beispiel

Es sei $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$u \cdot v = (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 0 = 18 \; .$$

40.4 Satz: Eigenschaften des euklidischen Produkts

Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $u \cdot v = v \cdot u$ **(Kommutativität)**

b) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ **(Additivität** oder **Distributivität)**

c) $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$ **(Homogenität)**

d) $v \cdot v \geq 0$
$v \cdot v = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ **(positive Definitheit)**.

Bemerkungen:

- Die Kommutativität des Skalarproduktes bezeichnet man auch als **Symmetrie.**
- Distributivität und Homogenität ergeben zusammen

$$(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w)$$

sowie mit der Symmetrie

$$u \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \cdot v) + \beta(u \cdot w)$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diese Eigenschaften fasst man unter dem Begriff **Bilinearität** zusammen.

- Für $v \cdot v$ schreibt man auch v^2.

Beweis: (a) und (c) folgen unmittelbar aus der Definition.

Zu (b): Es gilt

$$\begin{aligned}(u+v) \cdot w &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)^{\mathrm{T}} \cdot (w_1, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i\end{aligned}$$

$$= u \cdot w + v \cdot w \ .$$

Zu (d): Es gilt $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \geq 0$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$, d. h. wenn $v = 0$. $\square$

40.5 Definition: euklidische Norm

Es sei $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Die **euklidische Norm** von u ist definiert durch

$$|u| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} \ .$$

Der **euklidische Abstand** zweier Vektoren $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ und $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ ist definiert durch

$$d(u, v) := |u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2} \ .$$

Bemerkung: Die euklidische Norm misst die *Länge* eines Vektors.

40.6 Beispiel

Für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{1 + 9 + 4 + 49} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \\ d(u, v) &= \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 16 + 16 + 25} = \sqrt{58} \ . \end{aligned}$$

40.7 Satz: Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung im $\mathbb{R}^n$

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v| \ .$$

Beweis: in der nächsten Vorlesung (in allgemeinerer Form)

40.8 Satz: Eigenschaften der euklidischen Norm

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

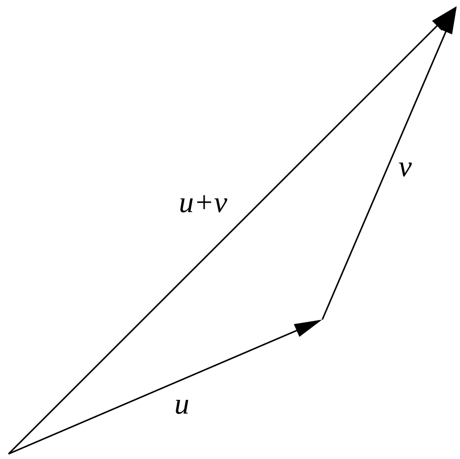
a) $|u| \geq 0$

b) $|u| = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$

c) $|\alpha u| = |\alpha| \ |u|$

d) $|u + v| \leq |u| + |v|$ **(Dreiecksungleichung)**

Bedeutung der Dreiecksungleichung: Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist nie kleiner als die Länge der dritten Dreiecksseite.



Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition der euklidischen Norm und der positiven Definitheit des euklidischen Produktes.

Zu (c): Nach Definition der euklidischen Norm ist

$$\begin{aligned}|\alpha u| &= \sqrt{(\alpha u_1)^2 + \ldots + (\alpha u_n)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(u_1^2 + \ldots + u_n^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \ \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\end{aligned}$$

$$= |\alpha| \ \ |u|$$

Zu (d): Es ist

$$\begin{aligned}
|u+v|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) && \text{(nach Def.)}\\
&= u^2 + u\cdot v + v\cdot u + v^2 && \text{(Distributivität)}\\
&= |u|^2 + 2u\cdot v + |v|^2 &&\\
&\leq |u|^2 + 2\,|u| \ \ |v| + |v|^2 && \text{(Cauchy-Schwarz)}\\
&= (|u| + |v|)^2 \ .
\end{aligned}$$

Wegen der Monotonie der Quadratwurzelfunktion (man beachte, dass beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind) folgt

$$|u+v| \leq |u| + |v| \ .$$

□

40.9 Satz: Eigenschaften des euklidischen Abstandes

Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $d(u,v) \geq 0$

b) $d(u,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v$

c) $d(u,v) = d(v,u)$

d) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Beweis: Alle Eigenschaften ergeben sich als direkte Folgerungen aus Satz 40.8.

□

40.10 Definition: Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal,** falls $u \cdot v = 0$.

Beispiel: Es sei $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$u \cdot v = -2 + 6 + 0 - 4 = 0 \ ,$$

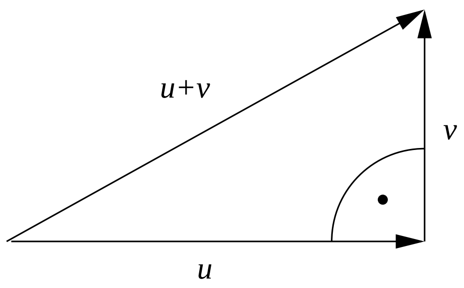
u und v sind also orthogonal.

Bemerkung: „orthogonal“ = „zueinander senkrecht“

40.11 Satz von Pythagoras im $\mathbb{R}^n$

Sind $u, v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, so gilt

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \ .$$



Hypotenusenquadrat =
Summe der Kathetenquadrate

Beweis: Es gilt

$$|u+v|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = |u|^2 + 2\underbrace{u \cdot v}_{\substack{=0 \\ \text{wegen Orthogonalität}}} + |v|^2$$

□

Beispiel: $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

$$\begin{aligned} |u|^2 &= 4 + 9 + 1 + 16 = 30 \\ |v|^2 &= 1 + 4 + 0 + 1 = 6 \\ u + v &= (-1, 5, 1, 3)^{\mathrm{T}} \\ |u + v|^2 &= 1 + 25 + 1 + 9 = 36 \\ &= |u|^2 + |v|^2 \ . \end{aligned}$$

40.12 Interpretation des euklidischen Produktes als Matrixmultiplikation

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dann kann man das euklidische Produkt $u \cdot v$ als Multiplikation der $1 \times n$-Matrix u^{T} mit der $n \times 1$-Matrix v auffassen:

$$u \cdot v = u^{\mathrm{T}} v \ .$$

(Zur Erinnerung: Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind für uns stets Spaltenvektoren.)

Beispiel: Für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ gilt

$$u^{\mathrm{T}} v = (1, -3, 7, 4) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 - 6 + 7 + 36 = 37 \ .$$