41 Funktionalanalytische Verallgemeinerungen

41.1 Motivation

- Die Begriffe des euklidischen Produktes, der Norm und des Abstandes sollen abstrahiert werden, um sie auch auf andere Räume übertragen zu können.
- Dies ist auch für Anwendungen wichtig: Zum Beispiel ist in Signal- und Bildverarbeitung die Fouriertransformation von großer Bedeutung. Sie beruht auf den in diesem Abschnitt besprochenen Konzepten.

41.2 Definition: inneres Produkt

Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Funktion

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt **inneres Produkt (Skalarprodukt),** wenn für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a)	$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$	**(Symmetrie)**
(b)	$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$	**(Additivität)**
(c)	$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$	**(Homogenität)**
(d)	$\langle v, v\rangle \geq 0$	**(Nichtnegativität)**
	$\langle v, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$	**(Nichtdegeneriertheit)**

Ist dies der Fall, so heißt $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ **Prä-Hilbert-Raum.**

Bemerkungen: 1. Wenn jede Cauchy-Folge aus Elementen von V (siehe MfI 1, 10.11) gegen ein Element von V konvergiert, so heißt der Raum V *vollständig.* Ein vollständiger Prä-Hilbert-Raum heißt **Hilbertraum.**

2. Der Anlass für unsere Beschränkung auf reelle Vektorräume liegt in der Nichtnegativität: Wählt man als Grundkörper für V statt $\mathbb{R}$ beispielsweise den Körper der komplexen Zahlen oder ein Galoisfeld, so ist nicht ohne weiteres klar, wie die Forderung der Nichtnegativität darauf übertragen werden kann, da in diesen Körpern keine $\geq$-Relation zur Verfügung steht.

41.3 Beispiele

a) **Euklidische Räume**

Der n-dimensionale euklidische Raum ist ein Prä-Hilbert-Raum. Nach Satz 40.4 sind alle Eigenschaften von Definition 41.2 erfüllt.

b) **Gewichtete euklidische Räume**

Für Vektoren $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ und $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$ in $\mathbb{R}^2$ wird durch

$$\langle u, v\rangle := 3u_1v_1 + 5u_2v_2$$

ein Skalarprodukt definiert.

Beweis: *Symmetrie:* Für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2 = \langle v, u\rangle \ .$$

Additivität: Für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\langle u+v, w\rangle &= 3(u_1+v_1)w_1 + 5(u_2+v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 5u_2w_2) + (3v_1w_1 + 5v_2w_2) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \ .\end{aligned}$$

Homogenität: Für $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \alpha u, v\rangle = 3\alpha u_1v_1 + 5\alpha u_2v_2 = \alpha\langle u, v\rangle \ .$$

Nichtnegativität: Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\langle v, v\rangle = 3\underbrace{v_1^2}_{\geq 0} + 5\underbrace{v_2^2}_{\geq 0} \geq 0 \ .$$

Dabei gilt $\langle v, v\rangle = 0$ genau dann, wenn $v_1 = v_2 = 0$ *(Nichtdegeneriertheit)*.

□

c) **Polynomräume**

Für beliebige Polynome

$$p := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \qquad\qquad q := \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

vom Grad $\leq n$ definieren wir

$$\langle p, q\rangle := \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \ .$$

Mit diesem Skalarprodukt wird der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n zu einem Prä-Hilbert-Raum.

d) **Funktionenraum $\boldsymbol{C[a,b]}$**

Es sei $C[a,b]$ der Vektorraum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Für alle $f,g\in C[a,b]$ wird mittels

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert, mit dem $C[a,b]$ zum Prä-Hilbert-Raum wird.

Lässt sich auch die euklidische Norm verallgemeinern?

41.4 Definition: Norm

Es sei V ein reeller Vektorraum.

Eine Abbildung $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ heißt **Norm** auf V, wenn für alle $u,v\in V$, $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt

a) $\|v\|\geq 0$

b) $\|v\|=0 \quad\Rightarrow\quad v=0$

c) $\|\alpha v\|=|\alpha|\;\|v\|$

d) $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ **(Dreiecksungleichung).**

In diesem Fall heißt $(V,\|\cdot\|)$ **normierter Raum.**

Bemerkung: Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum** (vgl. Bemerkung zu Def. 41.2 zum Begriff Vollständigkeit).

41.5 Satz: Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung in Prä-Hilbert-Räumen

Es sei $(V,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum. Dann gilt

$$\langle u,v\rangle^2\leq\langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$$

für beliebige $u,v\in V$.

Beweis: Falls $u = 0$ ist, so sind beide Seiten gleich 0, und die Ungleichung gilt.

Es sei also $u \neq 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $v \in V$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle ux + v, ux + v \rangle \\ &= \langle ux, ux \rangle + \langle ux, v \rangle + \langle v, ux \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \underbrace{\langle u, u \rangle}_{=:a} x^2 + \underbrace{2\langle u, v \rangle}_{=:b} x + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=:c} . \end{aligned}$$

Die Parabel $ax^2 + bx + c$ besitzt also höchstens eine reelle Nullstelle. Für ihre Diskriminante gilt daher

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle .$$

Daraus folgt die Behauptung. □

41.6 Satz: Induzierte Norm von Prä-Hilbert-Räumen

Jeder Prä-Hilbert-Raum $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ wird mit

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

zum normierten Raum.

Beweis: Die Eigenschaften (a), (b) folgen unmittelbar aus Def. 41.2(d).

Zu (c): Es gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha v\| &= \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} && \text{(nach Def.)} \\ &= \sqrt{\alpha \langle v, \alpha v \rangle} && \text{(Homogenität)} \\ &= \sqrt{\alpha \langle \alpha v, v \rangle} && \text{(Symmetrie)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} && \text{(Homogenität)} \\ &= |\alpha| \; \|v\| && \text{(Def.)} \end{aligned}$$

Zu (d): Es ist

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle && \text{(Def.)} \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle \\ &\quad + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle && \text{(Additivität, Symmetrie)} \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 && \text{(Symmetrie, Def.)} \\ &\leq \|u\|^2 + 2\,\|u\| \; \|v\| + \|v\|^2 && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \; . \end{aligned}$$

$\square$

41.7 Beispiele

a) **Norm einer stetigen Funktion**

$C[a,b]$ wird mit

$$\|f\| := \left(\int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \qquad \text{für alle } f \in C[a,b]$$

zum normierten Raum.

Beispielsweise hat $f(x) = 1/x$ im Intervall $[1,2]$ die Norm

$$\|f\| = \sqrt{\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x} = \sqrt{\left[-\frac{1}{x} \right]_1^2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

b) **Gewichtete euklidische Norm**

Der Raum $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{9} u_1 v_1 + \frac{1}{4} u_2 v_2$$

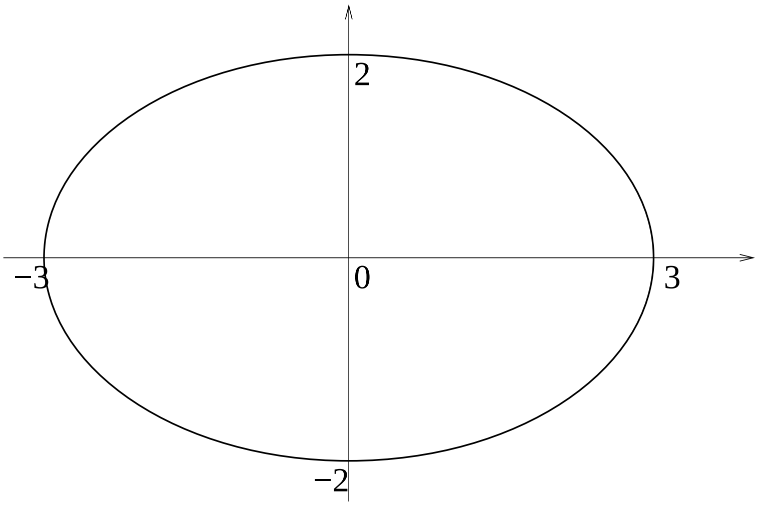
für alle $u = (u_1, u_2)^\mathrm{T}, v = (v_1, v_2)^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^2$ definiert ist, hat die induzierte Norm

$$\|u\| := \sqrt{\frac{u_1^2}{9} + \frac{u_2^2}{4}} \ .$$

Der Einheitskreis bezüglich dieser Norm (das heißt die Menge aller $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$) ist gegeben durch

$$\frac{u_1^2}{9} + \frac{u_2^2}{4} = 1 \ .$$

Dies ist eine Ellipsengleichung vom Typ $\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 1$ mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 2$:



Einheitskreise in solchen Normen sind also nicht immer „rund“.

Kann man auch den Begriff des euklidischen Abstands verallgemeinern?

41.8 Definition: Metrik

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $d : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik,** falls für alle $u, v, w \in V$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $d(u, v) \geq 0$

b) $d(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$

c) $d(u, v) = d(v, u)$

d) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

In diesem Falle heißt (V, d) **metrischer Raum.**

Bemerkung: Für vollständige metrische Räume gibt es keinen speziellen Namen.

41.9 Satz: Induzierte Metrik eines normierten Raumes

Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist mit der Metrik

$$d(u,v) := \|u-v\| \quad \text{für alle } u,v \in V$$

ein metrischer Raum.

Beweis: Folgt direkt durch Vergleich der Definitionen 41.4 und 41.8. $\square$

41.10 Beispiel: Metrik auf $\boldsymbol{C[a,b]}$

Für $f, g \in C[a,b]$ wird durch

$$d(f,g) := \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

eine Metrik erklärt.

Beispielsweise haben $f(x) = 5x$ und $g(x) = 2x - 1$ in der so definierten Metrik über dem Intervall $[0,1]$ den Abstand

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \left(\int_0^1 (3x+1)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^1 (9x^2+6x+1) \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &= \left(\left[3x^3+3x^2+x\right]_0^1 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{7}\,. \end{aligned}$$