Mathematatik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 11
Ausgabe: 25. Juni 2010 **Abgabe:** 2. Juli 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4+3=7 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Bedeutung der Eigenwerte und Eigenvektoren am Beispiel von stochastischen Matrizen erklären. Stochastische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind Matrizen, deren Einträge nicht negativ sind (das heißt alle Einträge sind größer oder gleich 0) und ihre Spaltensumme ergeben 1, d.h. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Solche Matrizen kommen sehr häufig in vielen Bereichen der Informatik vor.

Seien nun zwei Matrizen S_1 und S_2 gegeben:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von S_1 und S_2 und geben Sie alle Rechenschritte an.

b) Gegeben sei der Vektor $v = (3, 3)^\top$. Berechnen Sie $S_1^k v$ und $S_2^k v$ für $k = 3$. Welches Ergebnis würden Sie erhalten, wenn $k \to \infty$ strebt? Gibt es Unterschiede zwischen den Ergebnissen der beiden Matrizen? Erklären Sie!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (6+3=9 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass $O(n)$ und $SO(n)$ Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

bezüglich der Matrizenmultiplikation sind.

b) Gegeben sei ein beliebiger Vektorraum V. Sei weiterhin eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben, die einen Eigenwert λ hat. Wir definieren den Eigenraum analog zur Vorlesung als $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 4 (2+2=4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage:

a) Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist.

b) Besitzt eine $n \times n$-Matrix n paarweise verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.
Hinweis: Zeigen Sie folgenden Hilfssatz:
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, v_2, \ldots, v_k$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann ist die Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.