Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 12
Ausgabe: 2. Juli 2010 **Abgabe:** 9. Juli 2010 vor der Vorlesung

Anmerkung: Alle Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben, die zusätzliche Punkte erbringen können.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 2 ($2 + 2 = 4$ Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $\lambda = a + ib$ ein Eigenwert einer reellen Matrix A, so ist auch das komplex konjugierte $\overline{\lambda} = a - ib$ ein Eigenwert.

b) Gegeben sei eine Matrix $A = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit den Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $m \leq n$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{rang} A = m \quad \Leftrightarrow \quad A^\top A \text{ regulär}$$

Aufgabe 3 ($5 + 4^*$ Punkte)

a) In der Bildverarbeitung gibt es Verfahren zur Bildkompression, die auf dem Prinzip der Singulärwertzerlegung basieren. Sei eine Matrix A gegeben mit Rang r. Um den Speicherplatz zu reduzieren, werden anstatt r Singulärwerte, $k < r$ Singulärwerte verwendet, d.h. man berechnet analog zu 47.4

$$A = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\top$$

Wenden Sie dieses Verfahren auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

an und diskutieren Sie das Ergebnis.

b) Gegeben sei eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und betrachten Sie die Matrix $C^T C$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $C^\top C$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung. Geben Sie in jedem Schritt ihrer Berechnungen die Dimensionen der auftretenden Matrizen an.

Aufgabe 4 $(3+2+(2+2+4^*+4^*)=9+8^*$ **Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$, $T \in GL(n, \mathbb{K})$, $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $f(A) = T^{-1}AT$ und sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist das charakteristische Polynom von A gleich dem von $f(A)$.

b) f ist ein Ringisomorphismus von $\mathbb{K}^{n\times n}$.

c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ heißt Minimalpolynom von A, falls

   (i) $p(A) = 0$ (die Nullmatrix) ist;

   (ii) p ist normiert;

   (iii) p ein Teiler von jedem Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{C}[x]$ ist, das (i) und (ii) erfüllt.

   Zeigen Sie:

   c1) Es existiert ein Polynom p, das (i)-(ii) erfüllt.

   c2) Für jedes solche Polynom gilt auch $p(f(A)) = 0$.

   c3) Das Minimalpolynom existiert und ist eindeutig bestimmt. A und $f(A)$ haben das gleiche Minimalpolynom.

   c4) Ist A diagonalisierbar und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A, dann ist $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$ das Minimalpolynom von A.