Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr — MPI für Informatik
M.Sc. Kai Hagenburg — MIA Group
Sommersemester 2010 — Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 6

Ausgabe: 21. Mai 2010 **Abgabe:** 28. Mai 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

In dieser Aufgabe seien jeweils lineare Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gegeben seien außerdem die Standardbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ mit den Basisvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Sei für diesen Aufgabenteil $A_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gewählt mit

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schließen Sie ohne weitere Berechnungen anhand der Spaltenvektoren von A_1 auf den Effekt, den die Abbildung f auf einen Vektor $(x_1, x_2, x_3)^\top$ hat.

b) Sei nun für diesen Aufgabenteil $A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gewählt mit

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie dim Im (f_2), dim Ker (f_2), sowie eine Basis von Im (f_2).

c) Es seien zusätzlich zu f_2 weitere lineare Abbildungen f_3, f_4 und f_5 gegeben mit

$$f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5,$$

sowie entsprechenden Matrizen A_3, A_4 und A_5. Bestimmen Sie den maximalen Rang der Matrix A_6, die der Abbildung

$$f_6 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \qquad v \mapsto f_5(f_4(f_2(f_3(v))))$$

zugeordnet ist. Ist $A_6 \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto (x_1, x_2, -x_3)^\top$, d.h. f beschreibt die Spiegelung an der von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aufgespannten Ebene.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von f, einmal bezüglich der Standardbasis B und einmal bezüglich der Basis $C = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\}$.

b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei festgelegt durch

$$f(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_3, \qquad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3, \qquad f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3.$$

Geben Sie die Abbildungsmatrizen von f bezgl. einer kanonischen Basis und der Basis $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^\top$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)^\top$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 6)^\top$ an.

Aufgabe 3 (2+3=5 Punkte)

Es bezeichne $C^1(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}-$Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die durch

$$\mathbf{v}_1(t) = \exp(3t), \qquad \mathbf{v}_2(t) = t\exp(3t), \qquad \mathbf{v}_3(t) = t^2\exp(3t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

gegebenen Funktionen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in C^1(\mathbb{R})$ sind linear unabhängig.

b) Sei $V := \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Zeigen Sie: Die Differentiation $(Dv)(t) := v'(t)$ ist eine lineare Abbildung $D : V \to V$ und geben Sie eine passende Matrixdarstellung von D bzgl. der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ an.

Aufgabe 4 (2+2+3=7 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

b) Seien $A, B, C \in K^{n\times n}$. Dann gilt $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

c) Sei $f_A : K^n \to K^m$ und $f_B : K^p \to K^n$ lineare Abbildungen mit den jeweils dazu passenden Matrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$. Dann gilt $\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang}(\mathrm{A}), \operatorname{rang}(B))$. Wann gilt die Gleichheit?
Hinweis: Verwenden Sie Aussagen, die wir auf dem letzten Übungsblatt bereits bewiesen haben.