Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Präsenzübung Blatt 10
Ausgabe: 21. / 22. Juni 2010

Aufgabe 1

Betrachten Sie $V = C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle \quad := \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, welche die Funktion $u(x) = \cos(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzgl. der induzierten Norm am besten approximiert.

Aufgabe 2

Sei V die Menge aller Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Auf V sei das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle \quad := \quad \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

definiert. Berechnen Sie eine Ortho*gonal*basis aus der Basis $\{1, x, x^2\}$ mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Aufgabe 3

a) Verwenden Sie die Beziehungen

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

und zeigen Sie die Additionstheoreme

(a) $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
(b) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
(c) $\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$

b) Bestimmen Sie, z.B. unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme, die Fourier-Koeffizienten der folgenden Funktionen:

(a) $\sin^4(2x)$
(b) $3\sin(5x) - 4\sin^3(7x)$
(c) $\cos^2(3x) - \sin^2(3x)$