Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Präsenzübung Blatt 9
Ausgabe: 14. / 15. Juni 2010

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir zwei Metriken und ihre Eigenschaften betrachten. Die *diskrete Metrik* ist definiert für eine beliebige Menge M_1 und

$$d_D(x,y) \quad := \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

Die *SNCF-Metrik* (benannt nach der gleichnamigen französischen Eisenbahngesellschaft) ist definiert für die Menge $M_2 = \mathbb{R}^2$, einem zentralen Punkt $P \in M_2$, einer beliebigen Metrik d, die zusammen mit M_2 einen metrischen Raum bildet und es gelte

$$d_{SNCF}(x,y) \quad := \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ d(x,y) & \text{falls } P \text{ auf der Geraden liegt, die die Punkte } x \\ & \text{und } y \text{ direkt miteinander verbindet,} \\ d(x,P) + d(P,y), & \text{falls } P \text{ nicht auf dieser Geraden liegt,} \end{cases}.$$

a) Überprüfen Sie, ob (M_1, d_D) ein metrischer Raum ist.

b) Überprüfen Sie, ob (M_2, d_{SNCF}) ein metrischer Raum ist.

c) Sind die beiden Metriken d_D und d_{SNCF} von einer Norm induziert worden?

Aufgabe 2

Gegeben sei mit Π_{20} der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 20. Dieser sei mit folgendem Skalarprodukt und zugehöriger Norm versehen:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und } \|p\| := \sqrt{\langle p, p \rangle}.$$

Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\left(\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{21} + bx - x^{20} \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

minimal wird.