Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Probeklausur

Ausgabe: 13. Juli 2010   keine Abgabe erforderlich

Anmerkung: Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angeglichen. Numerische Berechnungen sind per Hand auszuführen.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben seien die Polynome $f, g, h \in K[x]$. Zeigen Sie, dass es genau dann Polynome h_1 und h_2 mit $h_1 f + h_2 g = h$ gibt, wenn $\mathrm{ggT}(f, g)$ ein Teiler von h ist. Wie berechnet man h_1 und h_2?

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \oplus y := x + y - xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

b) Sei die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{(2)}] := \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$ gegeben, zusammen mit den üblichen Operationen $+, \cdot$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus zur Bestimmung des Ranges von A.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Führen Sie dabei mit Hilfe geeigneter Umformungen und des Laplaceschen Entwicklungssatzes die Berechnung der Determinante der (4×4)-Matrix A auf die Berechnung der Determinante einer (3×3)-Matrix zurück.

Aufgabe 5 (4+4+4 Punkte)

a) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi_1(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(A) = \mathrm{Spur}(A)$ ist eine lineare Abbildung.

b) Sei $\varphi_2 : V \to W$ bijektive lineare Abbildung, d.h. isomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch φ_2^{-1} linear ist.

c) Sei $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildung mit $\varphi_3(x, y) := (x - y, y - x, x)$. Bestimmen Sie jeweils die Dimensionen von Kern(φ) und Bild(φ), sowie jeweils eine Basis von Kern(φ) und Bild(φ).

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegegen sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie das euklidische Produkt $\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $\langle A^\top y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ gilt.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden. Beweisen Sie: Für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt: $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 8 (4+4 Punkte)

Gegeben sei V der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(B^\top A)$ (dabei sind $A, B \in V$) , und (siehe Aufgabe 5) $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

- Zeigen Sie, dass $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ einen Prä-Hilbert-Raum bildet.
- Bestimmen Sie für $n = 2$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Multiple Choice: In dieser Aufgabe werden 5 Aussagen gestellt, die entweder richtig oder falsch sind. Sie erhalten für die korrekte Feststellung, ob eine Aussage richtig oder falsch ist, jeweils einen Punkt und jeweils einen zusätzlichen Punkt, falls Sie ihre Entscheidung korrekt begründen können.

a) Die Menge der symmetrischen Matrizen ist eine multiplikative Untergruppe der $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

b) Beschreibt man eine beliebige Funktion f mittels einer Fourierreihendarstellung, dann wird f besser approximiert, je mehr Fourierkoeffizienten in der Fourierreihe verwendet werden.

c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

d) Sind die Eigenwerte einer Matrix nicht alle paarweise verschieden, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

e) Im Falle einer Zeilenpivotisierung während des Gauß-Algorithmus wird das zu lösende Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe einer Permutationsmatrix so verändert, dass in den folgenden Schritten des Gauß-Alogorithmus das System $APy = b$ und $x = Py$ gelöst wird.