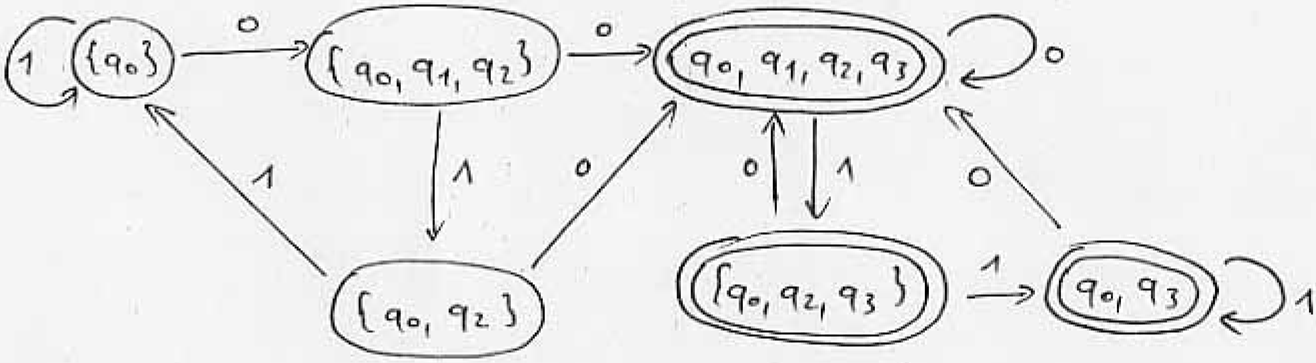
Aufgabe 1:

a) $(0+1)^*(010+00)(0+1)^*$

b)



Startzustand: $\{q_0\}$

Die Endzustände können auch zusammengefaßt werden

$\rightarrow$ Minimalautomat

c) $\{q_0\} \mathrel{\hat{=}} A$, $\{q_0, q_1, q_2\} \mathrel{\hat{=}} B$, $\{q_0, q_2\} \mathrel{\hat{=}} C$,

$\{q_0, q_1, q_2, q_3\} \mathrel{\hat{=}} D$, $\{q_0, q_2, q_3\} \mathrel{\hat{=}} E$, $\{q_0, q_3\} \mathrel{\hat{=}} F$

$G = (V, T, A, P)$ mit $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, $T = \{0, 1\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{\, & A \to 0B, & A \to 1A, && A \to \varepsilon, \\
& B \to 0D, & B \to 1C, && B \to \varepsilon, \\
& C \to 0D, & C \to 1A, && C \to \varepsilon, \\
& D \to 0D, & D \to 1E, && \\
& E \to 0D, & E \to 1F, && \\
& F \to 0D, & F \to 1F \,\} &&
\end{aligned}
$$

(Die Variablen D, E und F können auch entfallen.)

Aufgabe 2:

Sei $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ ein DFA für L.

Sei Q_E die Menge der von q_0 erreichbaren Zustände.

Idee: neuer Startzustand q_s, verbinde q_s mit ε-Kanten mit allen Knoten aus Q_E

formal: Sei $A' := (Q', \Sigma, q', F, \delta')$ ein NFA mit

$Q' := Q \cup \{q'\}$,

$\delta'(q, a) := \{\delta(q,a)\}$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$,

$\delta'(q, \varepsilon) := Q_E$

Behauptung: $L(A') = \text{Suffix}(L)$

Es gilt: $w \in L(A')$

$\Leftrightarrow$ $\delta'(q', w) \cap F \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow$ ex. $q \in Q_E$ mit $\delta'(q, w) \cap F \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow$ q ist von Q_E erreichbar und $\delta(q,w) \in F$

$\Leftrightarrow$ ex. $v \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, v) = q$ und $\delta(q, w) \in F$

$\Leftrightarrow$ ex. $v \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, vw) \in F$

$\Leftrightarrow$ $w \in \text{Suffix}(L)$ ∎

alternativ: $\text{Suffix}(L) = (\text{Präfix}(L^R))^R$ zeigen.

Aufgabe 3:

a) regulär

regulärer Ausdruck für $\overline{L_1}$: $(0+1)^*11001001(0+1)^*$

$\Rightarrow$ L_1 ist regulär (Abschlusseigenschaften)

b) kontextfrei, aber nicht regulär

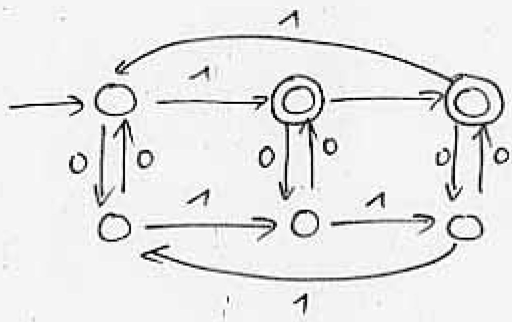
Wäre L_2 regulär, dann auch $\overline{L_2} = L_{PAL}$ ↯

Kf. Grammatik für L_2:

$$S \to 0S0 \mid 1S1$$
$$S \to 0T1 \mid 1T0$$
$$T \to 0T \mid 1T \mid \varepsilon$$

c) regulär

DFA für L_3:



d) nicht kontextfrei

Annahme: L_4 ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus Ogden's Lemma, wähle das Wort $0^n1^n0^n1^n$ und markiere die letzten n Buchstaben. Wegen $|vwx| \le n$ und da mind. ein Buchstabe aus vx markiert wurde, sind v und x unter den letzten $2n$ Buchstaben. Betrachte uv^2wx^2y: Wegen $|vx| \ge 1$ ändert sich die zweite Hälfte des Wortes, nicht aber die erste Hälfte. $\Rightarrow$ $uv^2wx^2y \notin L_4$ ↯

Aufgabe 4:

$S \to ABb \mid b$

$A \to aA \mid \varepsilon$

$B \to S \mid Bbb$

1. Terminale kommen nur in der Form $A \to a$ vor

$S \to ABD \mid D$

$A \to CA \mid \varepsilon$

$B \to S \mid BDD$

$C \to a$

$D \to b$

2. Entfernen von "langen" Regeln

$S \to AE \mid D$

$A \to CA \mid \varepsilon$

$B \to S \mid BF$

$C \to a$

$D \to b$

$E \to BD$

$F \to DD$

3. Entfernen von ε-Regeln

($A \to \varepsilon$ entfernen)

$S \to AE \mid E \mid D$

$A \to CA \mid C$

$B \to S \mid BF$

$C \to a$

$D \to b$

$E \to BD$

$F \to DD$

4. Entfernen von Kettenregeln

- $S \to D$ durch $S \to b$ ersetzen
- $S \to E$ -"- $S \to BD$ -"-
- $A \to C$ -"- $A \to a$ -"-
- $B \to S$ -"- $B \to AE$, $B \to b$, $B \to BD$

also: $S \to AE \mid BD \mid b$

$A \to CA \mid a$

$B \to AE \mid BF \mid BD \mid b$

$C \to a$

$D \to b$

$E \to BD$

$F \to DD$

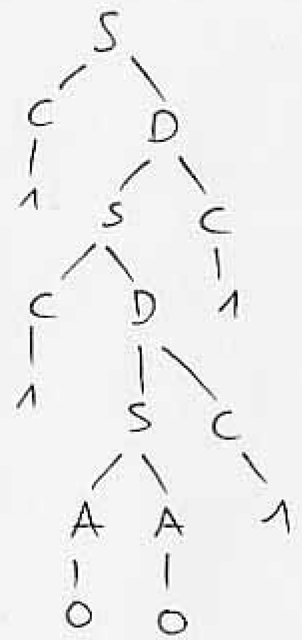
Aufgabe 5:

$w = 110011$:

S					
$\emptyset$	D				
$\emptyset$	S	$\emptyset$			
B	$\emptyset$	D	$\emptyset$		
S/D	B	S/B	D	S/D	
C/S	C/S	A/S	A/S	C/S	C/S
1	1	0	0	1	1

$\Rightarrow 110011 \in L(G)$

Syntaxbaum:



Linksableitung:

$S \to CD \to S \to 1D \to 1SC \to 1CDC \to 11DC$
$\to 11SCC \to 11AACC \to 110ACC \to 1100CC$
$\to 11001C \to 110011$

Rechtsableitung:

$S \to CD \to CSC \to CS1 \to CCD1 \to CCSC1$
$\to CCS11 \to CCAA11 \to CCA011 \to CC0011$
$\to C10011 \to 11011$

$w = 10011101$:

$\emptyset$							
$\emptyset$	$\emptyset$						
$\emptyset$	$\emptyset$	D					
D	$\emptyset$	S	$\emptyset$				
S	$\emptyset$	$\emptyset$	B	$\emptyset$			
$\emptyset$	D	$\emptyset$	D/S	B	S		
$\emptyset$	S/B	$\emptyset$	S/D	S/D	$\emptyset$	$\emptyset$	
C/S	A/S	A/S	C/S	C/S	C/S	A/S	C/S
1	0	0	1	1	1	0	1

$\Rightarrow 10011101 \notin L(G)$

Fortsetzung Aufgabe 3:

e) kontextfrei, nicht regulär

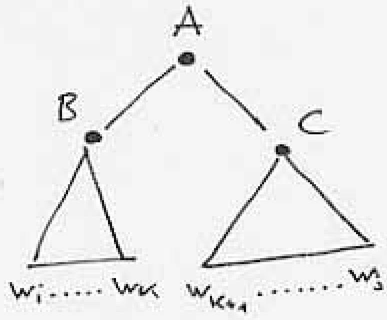
wäre L_5 regulär, dann auch $L_5 \cap 0^* 2^* = \{0^i 2^i \mid i \geq 0\}$ ↯

kontextfreie Grammatik für L_5:

$$S \to 0S2 \mid T$$

$$T \to 1T2 \mid \varepsilon$$

Aufgabe 6:



Sei $m_{i,j,A}$ die Anzahl der Syntaxbäume für das Teilwort $w_i \ldots$ [redacted] w_j beginnend mit der Variablen A.

Wie berechnet sich $m_{i,j,A}$? Betrachte alle "Trennstellen" k und Regeln $A \to BC$. Multipliziere die [redacted] Zahl der Syntaxbäume für den linken und rechten Teilbaum und summiere die Produkte für alle mögliche Fälle. Also:

$$m_{i,j,A} := \sum_{i \le k < j} \sum_{\substack{A \to BC \\ \in P}} m_{i,k,B} \cdot m_{k+1,j,C}$$

Algorithmus:

für alle $i = 1, \ldots, n$:

  für alle $A \in V$:

$$m_{i,i,A} := \begin{cases} 1, & \text{[redacted]}\ A \to w_i \in P \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $\ell = 2, \ldots, n$:

  für alle $i = 1, \ldots, n+1-\ell$:

  { $j := i$ [redacted] $+ \ell - 1$;

   für alle $A \in V$:

    $m_{i,j,A} := 0$

    für alle $k = i, \ldots, j-1$:

$$m_{i,j,A} := m_{i,j,A} + \sum_{\substack{A \to BC \\ \in P}} m_{i,k,B} \cdot m_{k+1,j,C}$$

  }

$m_{1,n,S}$ ausgeben;

Aufgabe 7:

Die Knoten eines Syntaxbaumes lassen sich in innere Knoten und Blattknoten unterteilen. Die Anzahl der Blatt-Knoten ist gerade die Anzahl der Buchstaben des Wortes, also $|w|$. Die Anzahl der inneren Knoten entspricht gerade der Anzahl der Ableitungsschritte (jeder innere Knoten beschreibt die linke Seite der zugehörigen Regel, die Kinder die rechte Seite). Wie man sich leicht überlegt (siehe Übungen) ist die Anzahl der Ableitungsschritte bei einer Grammatik in GrNF gerade $|w|$.

Die Anzahl der Knoten des Syntaxbaumes ist also $2|w|$ ∎

Aufgabe 8:

a) falsch. Für kontextfreie Sprachen, die nicht deterministisch kontextfrei sind(*), gibt es Kellerautomaten, aber keinen deterministischen Kellerautomaten.

(*) Solche Sprachen existieren (s. Vorlesung)

b) falsch. $\{S \to A,\ S \to B,\ A \to 1,\ B \to 1\}$ sind Regeln einer mehrdeutigen Grammatik für die Sprache $\{1\}$.
Diese Sprache ist aber eindeutig, z.B. $\{S \to 1\}$ ist eine eindeutige Grammatik.

c) wahr. Die TM verhält sich wie ein DFA für $a^*b^*c^*$, zusätzlich gibt es auf dem Arbeitsband ein Zähler für $|w|_a + |w|_b - |w|_c$. Die TM akzeptiert, wenn der Zähler nach Lesen der Eingabe gleich Null ist. Der Zähle nimmt Werte im Bereich $-n, \ldots, n$ an $\Rightarrow O(\log n)$ Platz

$\Rightarrow$ in L und damit in NL enthalten.

d) falsch. Jede reguläre Sprache ist nach Definition auch kontextsensitiv (vgl. auch Chomsky-Hierarchie).

e) falsch. Ogden's Lemma lautet

"L kontextfei $\Rightarrow$ L hat die Eigenschaften ..." oder

" Hat L nicht die Eigenschaften ... $\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei"

Man kann höchstens zeigen, dass eine Sprache <u>nicht</u> kontextfrei ist. Keinesfalls kann die Kontextfreiheit einer Sprache nachgewiesen werden.