Prof. Dr. Kurt Mehlhorn, Dr. Martin Skutella **WS 2003/04**

Übungen zu Theoretische Informatik

http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html

Übung 1 Abgabe: Freitag, 31.10.2003

Hinweis: Die Übungen sind jeweils freitags bis 9.15 Uhr (also *vor* der Vorlesung) abzugeben. Gruppenarbeit (bis zu zwei Personen) ist erlaubt und ausdrücklich erwünscht. Geben Sie Namen und Matrikelnummer(n) sowie die Nummer der Übungsgruppe auf ihrer Lösung an.

Aufgabe 1 (Asymptotische Notation) *(3+3=6 Punkte)*

Schlagen Sie – falls nicht mehr geläufig – die Bedeutung der LANDAU-Symbole O, o, Ω, ω und Θ in der Literatur nach.

a) Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend, d.h. f steht links von g genau dann, wenn $f \in O(g)$ gilt.

$$\sqrt{n}\log n,\ n\log\log n,\ n^{\log n},\ n2^{3\sqrt{\log n}},\ 1+\sin n,\ n\sqrt{\log n},\ n^2,\ n\log n,\ n2^{\sqrt{\log n}},\ n$$

b) Es sei $f,\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = \begin{cases} n^3, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n^2, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(n) = \begin{cases} n^3, & \text{falls } n \text{ prim} \\ n^2, & \text{falls } n \text{ sonst} \end{cases}$$

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (mit Begründung)?

$$f \in O(n^2),\ f \in O(n^3),\ g \in \Omega(n^2),\ g \in \Omega(n^3),\ f \in O(g),\ f \in \Omega(g)$$

Aufgabe 2 (Turingmaschinen) *(4+2=6 Punkte)*

Gegeben sei eine Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \mathbb{B}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$, $F = \{q_2\}$ und $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ wie folgt:

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, N)$	$(q_1, 0, N)$	(q_2, B, N)
q_1	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	–
q_2	–	–	–

Ein waagerechter Strich bedeutet, dass die Turingmaschine stoppt, d. h. $\delta(q, \gamma) = (q, \gamma, N)$ für $q \in Q$ und $\gamma \in \Gamma$.

a) Geben Sie die Konfigurationsfolge der Maschine M angesetzt auf die Eingabe 00110 an.

b) Beschreiben Sie informal, was M berechnet.

Aufgabe 3 (Turingmaschinen) (*6 Punkte*)

Es sei $\Sigma = \mathbb{B} \cup \{\#\}$. Geben Sie eine Turingmaschine an, die für Eingaben der Form $bin(a)\#bin(b) \in \Sigma^*$, $a, b \in \mathbb{N}$ die Summe $a + b$ (in Binärdarstellung) berechnet. Geben Sie neben der formalen Notation eine kurze Beschreibung der Zustände an.

Aufgabe 4 (Mehrband-Turingmaschinen) (*4+2=6 Punkte*)

Es sei $\Sigma = \mathbb{B} \cup \{\#\}$ und $L = \{bin(n)\#w \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{B}^*, |w| \leq n\}$ (mit $|\cdot|$ wird die Länge eines Wortes bezeichnet).

a) Geben Sie eine möglichst effiziente 2-Band-Turingmaschine an, die das Wortproblem für L löst, d. h. genau die Wörter aus L akzeptiert. Geben Sie neben der formalen Notation eine kurze Beschreibung der Zustände an.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Turingmaschine eine Laufzeit von $O(n)$ hat. Hinweis: Untersuchen Sie $\sum_{i=1}^{\infty} i\, 2^{-i}$ auf Konvergenz.