

## Übungen zu Theoretische Informatik

<http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html>

### Übung 2

Abgabe: Freitag, 7.11.2003

**Aufgabe 1** (Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit) (5 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist genau dann entscheidbar, wenn  $L$  und  $\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$  semi-entscheidbar sind.

**Aufgabe 2** (Einseitig beschränkte Turingmaschine) (5 Punkte)

Gegeben sei eine Turingmaschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ . Beschreiben Sie präzise die Konstruktion einer (1-Band-)Turingmaschine  $M'$ , die sich wie  $M$  verhält, dabei aber keine Bandzellen links der Startposition benutzt.

**Aufgabe 3** (Halteproblem bei beschränktem Platz) (4 Punkte)

Gegeben sei eine Turingmaschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ , die auf Eingaben der Länge  $n$  nur die Bandzellen  $1, \dots, s(n)$  benutzt. Zeigen Sie: Wenn  $M$  auf einer Eingabe der Länge  $n$  stoppt, dann stoppt  $M$  nach spätestens  $|Q||\Gamma|^{s(n)}s(n)$  Schritten. *Hinweis:* Wann gerät  $M$  in eine Schleife?

**Aufgabe 4** (Rekursiv aufzählbare Sprachen) (5 Punkte)

Sei  $f : \{0, 1, \dots, 9\}^* \rightarrow \{0, 1\}$  eine Funktion mit  $f(x) = 1$  genau dann, wenn  $x$  als geschlossener Block in der Dezimaldarstellung von  $\pi$  vorkommt. Zeigen Sie, dass die Sprache  $f^{-1}(1)$  rekursiv aufzählbar ist. *Hinweis:* Sie können annehmen, dass es eine Turingmaschine gibt, die einen beliebigen (endlichen) Präfix der Dezimaldarstellung von  $\pi$  in endlicher Zeit berechnet.

**Aufgabe 5** ( $\mathbb{N}^2$  und  $\mathbb{N}^k$ ) (4+1=5 Punkte)

- Zeigen Sie, dass es eine bijektive Funktion  $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  gibt, so dass  $f_2$  und  $f_2^{-1}$  auf der RAM und damit auch mit einer Turingmaschine berechnet werden können.
- Zeigen Sie, dass es für  $k \in \mathbb{N}$  eine bijektive Funktion  $f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  gibt, so dass  $f_k$

und  $f_k^{-1}$  auf der RAM und damit auch mit einer Turingmaschine berechnet werden können.