INFORMATIK

Universität des Saarlandes
FR 6.2 Informatik

Prof. Dr. Kurt Mehlhorn, Dr. Martin Skutella **WS 2003/04**

Übungen zu Theoretische Informatik

http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html

Übung 4 Abgabe: Freitag, 21.11.2003

Achtung: Geben Sie auf der *ersten Seite* ihrer Lösung den (die) Namen, die Matrikelnummer(n) und die *Nummer* der Übungsgruppe an. Andernfalls besteht kein Anspruch auf Korrektur.

Aufgabe 1 (Reduzierbarkeit) *(2+2+2+2=8 Punkte)*

In der Vorlesung wurde in Definition 2.8.5 das Konzept der Reduzierbarkeit definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Relation "$\leq$" transitiv ist.

b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f^{-1}(L_2) = L_1$ äquivalent zu der Bedingung $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$ aus der Definition ist.

c) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f(L_1) = L_2$ *nicht* äquivalent zu der Bedingung $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$ aus der Definition ist.

d) Beweisen oder wiederlegen Sie folgende Variante von Lemma 2.8.6: "Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv aufzählbar, so ist L_1 rekursiv aufzählbar."

Aufgabe 2 (Postsches Korrespondenzproblem (PKP)) *(2+2+2=6 Punkte)*

Betrachten Sie folgende Varianten des Postschen Korrespondenzproblems und beweisen Sie Ihre Antwort.

a) Ist das Postsche Korrespondenzproblem entscheidbar, wenn man sich auf einelementige Alphabete Σ beschränkt?

b) Ist das Postsche Korrespondenzproblem entscheidbar, wenn man sich auf das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ beschränkt?

c) Ist das Postsche Korrespondenzproblem entscheidbar, wenn man sich auf Wortpaare gleicher Länge beschränkt (d. h. $|x_1| = |y_1| = \ldots = |x_k| = |y_k|$) ?

Aufgabe 3 (Spezielle Turingmaschine P_w) *(4 Punkte)*

Für $w \in \Sigma^*$ sei P_w eine Turingmaschine, die w auf dem Band ausgibt und hält. Zeigen Sie, dass es eine total rekursive Funktion $p : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass $p(w)$ die Gödelnummer einer Turingmaschine P_w ist.

Aufgabe 4 (Formale Sätze) *(3+3=6 Punkte)*

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als formale Sätze wie in der Vorlesung definiert. Benutzen Sie dabei als Relationen ausschließlich $<, >, =$ und $\neq$, sowie $+$ und $\cdot$ als arithmetische Operationen.

a) Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden (Goldbachsche Vermutung).

b) Sind q_1 und q_2 teilerfremde Zahlen und $0 \leq r_i < q_i$ für $i = 1, 2$, so gibt es eine Zahl $0 \leq x < q_1 q_2$ mit $x \equiv r_i \mod q_i$ für $i = 1, 2$ (Spezialfall des chinesischen Restsatzes).