I N F O R M A T I K

Universität des Saarlandes
FR 6.2 Informatik

Prof. Dr. Kurt Mehlhorn, Dr. Martin Skutella **WS 2003/04**

Übungen zu Theoretische Informatik

`http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html`

Übung 6 Abgabe: Freitag, 5.12.2003

Aufgabe 1 (Clique(k)) *(3 Punkte)*

Sei $k \in N$ eine Konstante. Es sei Clique(k) das Problem, für einen Graphen zu entscheiden, ob er eine Clique der Größe k enthält. Zeigen Sie: Clique(k) $\in P$.

Aufgabe 2 (Polynomielle Reduktion) *(3 Punkte)*

Seien L_1 und L_2 Sprachen über Σ mit $L_2 \neq \emptyset$ und $L_2 \neq \Sigma^*$.
Zeigen Sie: $L_1 \in P \Rightarrow L_1 \leq_p L_2$.

Aufgabe 3 (Directed Hamiltonian Circuit/Path) *(3+3=6 Punkte)*

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $n := |V|$. Ein *gerichteter Hamiltonscher Pfad* in G ist eine Nummerierung $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aller Knoten in V, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 1, \ldots, n$. Ein *gerichteter Hamiltonscher Kreis* in G ist ein gerichteter Hamiltonscher Pfad mit der zusätzlichen Eigenschaft $(v_n, v_1) \in E$.

Die Sprache Directed Hamiltonian Path (DHP) besteht aus allen Graphen, die einen gerichteten Hamiltonschen Pfad enthalten. Die Sprache Directed Hamiltonian Circuit (DHC) besteht aus allen Graphen, die eine gerichteten Hamiltonschen Kreis enthalten.

a) Zeigen Sie: DHC $\leq_p$ DHP.

b) Zeigen Sie: DHP $\leq_p$ DHC.

Aufgabe 4 (Disjunktion von Monomen) *(3+3=6 Punkte)*

Für natürliche Zahlen n und m seien m Monome über n Variablen gegeben. Ein Monom ist ein Konjunktion von Literalen, z. B. $x_1 \wedge x_3 \wedge (\neg x_4)$ (oder kurz: $x_1 x_3 \overline{x_4}$).

a) Zeigen Sie: Das Problem, zu entscheiden, ob eine Disjunktion von Monomen erfüllbar ist, ist in P enthalten.

b) Zeigen Sie: Das Problem, für eine Disjunktion von Monomen zu entscheiden, ob es eine Variablenbelegung $a \in \{0,1\}^n$ gibt, so dass alle Monome den Wert 0 haben, ist NP-vollständig.

Aufgabe 5 (Independent Set und Vertex Cover) *(3+3=6 Punkte)*

a) Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt *unabhängig (independent)*, wenn zwischen je zwei Knoten aus V' keine Kante existiert. Die Sprache Independent Set (IP) besteht aus allen Paaren (G, k) von ungerichteten Graphen G und natürlichen Zahlen k, für die G eine unabhängige Knotenmenge mit k Knoten enthält.

Zeigen Sie: Die Sprache IP ist NP-vollständig.

b) Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt *Knotenüberdeckung (vertex cover)*, wenn jede Kante in E zu mindestens einen Knoten aus V' inzident ist. Die Sprache Vertex Cover (VC) besteht aus allen Paaren (G, k) von ungerichteten Graphen G und natürlichen Zahlen k, für die G eine Knotenüberdeckung der Größe k besitzt.

Zeigen Sie: Die Sprache VC ist NP-vollständig.

Hinweis: Betrachten Sie $V \setminus V'$.

Aufgabe 6* (Die Komplexitätsklasse *coNP*) *(6 Bonuspunkte)*

Die Komplexitätsklasse *coNP* ist definiert durch $coNP := \left\{\overline{L} \subseteq \Sigma^* | L \in NP\right\}$. Die Klasse *coNP* enthält also das Komplement aller Sprachen, die in NP enthalten sind. Es ist ein offenes Problem, ob $NP = coNP$ gilt oder nicht. Es wird jedoch allgemein vermutet, dass $NP \neq coNP$ gilt.

Zeigen Sie: $\quad P = NP \quad \Rightarrow \quad NP = coNP.$