

## Übungen zu Theoretische Informatik

<http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html>

### Übung 10

Abgabe: Freitag, 23.01.2004

#### Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen)

(2+2+2+2=8 Punkte)

Sei  $L$  eine reguläre Sprache und  $A$  ein NFA, der  $L$  akzeptiert. Erinnern Sie sich an die Aufgabe 3 der Übung 8, und die dort definierten regulären Sprachen  $L^R$ ,  $L_{PAL/2}$  und  $L_k$  mit den zugehörigen NFAs  $A^R$ ,  $A_{PAL/2}$ , und  $A_k$ . Dabei entsteht  $A_{PAL/2}$  aus  $A \times A^R$ , indem man  $F_{PAL/2} = \{(q, q) \mid q \in F\}$  wählt.

- Indem man  $A \times A_{(k-1)}^R$  bildet, kann man  $\frac{1}{k}L := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L \wedge |uv| = k|u|\}$  akzeptieren. Wie muss man dabei den Start- und die Endzustände wählen?
- Zeigen Sie, dass auch  $L/k := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : uv \in L \wedge |uv| = k|v|\}$  regulär ist. *Hinweis:* Stellen Sie einen Zusammenhang zu  $\frac{1}{k}L$  her.
- Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man das mittlere Drittel  $\frac{L}{3} := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u, w \in \Sigma^* : uvw \in L \wedge |u| = |v| = |w|\}$  erkennen. Betrachten Sie  $A_1^R \times A \times A_1$ . *Hinweis:* Halten Sie zunächst die Zustände  $q$  und  $q'$  am Anfang und Ende von  $v$  fest und wählen Sie Start- und Endzustände geeignet. Verallgemeinern Sie anschließend.
- Das Weglassen des mittleren Drittels erzeugt jedoch keine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass  $L' = \{uw \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uvw \in L \wedge |u| = |v| = |w|\}$  im Allgemeinen nicht regulär ist. *Hinweis:* Betrachten Sie  $L = 0^*1^*$  und  $L' \cap 0^*1^*$ .

#### Aufgabe 2 (Korrekte Klammerausdrücke)

(1+3+2=6 Punkte)

Die Sprache der korrekten Klammerausdrücke über  $\{(, )\}$  ist kontextfrei und wird durch die Grammatik  $G = (T, V, S, P)$ ,  $T = \{(, )\}$ ,  $V = \{S\}$ ,  $P = \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow (S), S \rightarrow SS\}$  erzeugt.

- Zeigen Sie, dass die Sprache der korrekten Klammerausdrücke nicht regulär ist.
- Ist die Grammatik  $G$  eindeutig? Ist die Sprache der korrekten Klammerausdrücke eindeutig? Beweisen Sie ihre Antwort.

- c) Geben Sie einen Algorithmus an, um das Wortproblem für korrekte Klammerausdrücke in linearer Zeit zu entscheiden. *Hinweis:* Betrachten Sie Präfixe eines Wortes.

**Aufgabe 3** (Normalformen)

(3+1=4 Punkte)

- a) Gegeben sei die kontextfreie Grammatik  $G = (T, V, S, P)$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $V = \{S, A, B\}$ ,  $P = \{S \rightarrow ASA, S \rightarrow aB, A \rightarrow B, B \rightarrow b, B \rightarrow \varepsilon\}$ . Berechnen Sie eine kontextfreie Grammatik  $G'$  in Chomsky-Normalform mit  $L(G') = L(G)$ . Geben Sie die Grammatik nach jedem der vier Schritte des Algorithmus an.
- b) Gibt es für kontextfreie Sprachen, die  $\varepsilon$  nicht enthalten, stets eine kontextfreie Grammatik, bei der alle Regeln entweder die Form  $A \rightarrow a$  oder  $A \rightarrow BCD$  mit  $a \in T$  und  $A, B, C, D \in V$  haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 4** (CYK-Algorithmus)

(4+2=6 Punkte)

Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik  $G = (T, V, A, P)$ ,  $T = \{0, 1\}$ ,  $V = \{A, B, C, D\}$ ,  $P = \{A \rightarrow AA, A \rightarrow CB, A \rightarrow CD, B \rightarrow AD, C \rightarrow 1, D \rightarrow 0\}$ . Benutzen Sie den CYK-Algorithmus, um das Wortproblem für

- a)  $w = 1010110100$
- b)  $w = 110001$

zu entscheiden. (Die Angabe einer Ableitung genügt nicht. Geben Sie nicht nur das Ergebnis, sondern auch deren Herleitung, z. B. die vollständige Tabelle der  $V_{ij}$  an.) Geben Sie im Fall einer positiven Antwort einen Syntaxbaum sowie die zugehörige Links- und Rechtsableitung für  $w$  an.