

Übungen zu Theoretische Informatik

<http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html>

Übung 10

Abgabe: Freitag, 23.01.2004

Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen)

(2+2+2+2=8 Punkte)

Sei L eine reguläre Sprache und A ein NFA, der L akzeptiert. Erinnern Sie sich an die Aufgabe 3 der Übung 8, und die dort definierten regulären Sprachen L^R , $L_{PAL/2}$ und L_k mit den zugehörigen NFAs A^R , $A_{PAL/2}$, und A_k . Dabei entsteht $A_{PAL/2}$ aus $A \times A^R$, indem man $F_{PAL/2} = \{(q, q) \mid q \in F\}$ wählt.

- Indem man $A \times A_{(k-1)}^R$ bildet, kann man $\frac{1}{k}L := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L \wedge |uv| = k|u|\}$ akzeptieren. Wie muss man dabei den Start- und die Endzustände wählen?
- Zeigen Sie, dass auch $L/k := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : uv \in L \wedge |uv| = k|v|\}$ regulär ist. *Hinweis:* Stellen Sie einen Zusammenhang zu $\frac{1}{k}L$ her.
- Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man das mittlere Drittel $\frac{L}{3} := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u, w \in \Sigma^* : uvw \in L \wedge |u| = |v| = |w|\}$ erkennen. Betrachten Sie $A_1^R \times A \times A_1$. *Hinweis:* Halten Sie zunächst die Zustände q und q' am Anfang und Ende von v fest und wählen Sie Start- und Endzustände geeignet. Verallgemeinern Sie anschließend.
- Das Weglassen des mittleren Drittels erzeugt jedoch keine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass $L' = \{uw \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uvw \in L \wedge |u| = |v| = |w|\}$ im Allgemeinen nicht regulär ist. *Hinweis:* Betrachten Sie $L = 0^*1^*$ und $L' \cap 0^*1^*$.

Aufgabe 2 (Korrekte Klammerausdrücke)

(1+3+2=6 Punkte)

Die Sprache der korrekten Klammerausdrücke über $\{(,)\}$ ist kontextfrei und wird durch die Grammatik $G = (T, V, S, P)$, $T = (\{, \})$, $V = \{S\}$, $P = \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow (S), S \rightarrow SS\}$ erzeugt.

- Zeigen Sie, dass die Sprache der korrekten Klammerausdrücke nicht regulär ist.
- Ist die Grammatik G eindeutig? Ist die Sprache der korrekten Klammerausdrücke eindeutig? Beweisen Sie ihre Antwort.

- c) Geben Sie einen Algorithmus an, um das Wortproblem für korrekte Klammerausdrücke in linearer Zeit zu entscheiden. *Hinweis:* Betrachten Sie Präfixe eines Wortes.

Aufgabe 3 (Normalformen)

(3+1=4 Punkte)

- a) Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (T, V, S, P)$, $T = \{a, b\}$, $V = \{S, A, B\}$, $P = \{S \rightarrow ASA, S \rightarrow aB, A \rightarrow B, B \rightarrow b, B \rightarrow \varepsilon\}$. Berechnen Sie eine kontextfreie Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G') = L(G)$. Geben Sie die Grammatik nach jedem der vier Schritte des Algorithmus an.
- b) Gibt es für kontextfreie Sprachen, die ε nicht enthalten, stets eine kontextfreie Grammatik, bei der alle Regeln entweder die Form $A \rightarrow a$ oder $A \rightarrow BCD$ mit $a \in T$ und $A, B, C, D \in V$ haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (CYK-Algorithmus)

(4+2=6 Punkte)

Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik $G = (T, V, A, P)$, $T = \{0, 1\}$, $V = \{A, B, C, D\}$, $P = \{A \rightarrow AA, A \rightarrow CB, A \rightarrow CD, B \rightarrow AD, C \rightarrow 1, D \rightarrow 0\}$. Benutzen Sie den CYK-Algorithmus, um das Wortproblem für

- a) $w = 1010110100$
- b) $w = 110001$

zu entscheiden. (Die Angabe einer Ableitung genügt nicht. Geben Sie nicht nur das Ergebnis, sondern auch deren Herleitung, z. B. die vollständige Tabelle der V_{ij} an.) Geben Sie im Fall einer positiven Antwort einen Syntaxbaum sowie die zugehörige Links- und Rechtsableitung für w an.