I N F O R M A T I K

Universität des Saarlandes

FR 6.2 Informatik

Prof. Dr. Kurt Mehlhorn, Dr. Martin Skutella

WS 2003/04

Zwischenklausur Theoretische Informatik

http://www.mpi-sb.mpg.de/units/ag1/teaching/theoinf-ws0304/index.html

Name: ____________________ 13.12.2003

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
Punkte										

Identitätskontrolle: ____________________

- Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten. Sie können maximal 75 Punkte erreichen. Mit der Hälfte der Punkte haben Sie auf jeden Fall bestanden.
- Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen. Sie dürfen jedoch ein Wörterbuch benutzen, wenn Sie dies **vor** Klausurbeginn der Klausuraufsicht mitgeteilt haben und das Wörterbuch von der Klausuraufsicht kontrolliert wurde.
- Die Klausur besteht aus einem Deckblatt (einseitig) und einem Aufgabenblatt (zweiseitig).
- Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt Papier. Schreiben Sie auf jedes Blatt Papier oben Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Achten Sie bitte auf leserliche Schrift und verständliche Begründungen.
- Halten Sie Ihren Personalausweis (oder Reisepass) und Studentenausweis bereit.
- Jeder Täuschungsversuch führt zum Ausschluss von der aktuellen und allen nachfolgenden Klausuren der Vorlesung. Täuschungsversuche werden von der Universität dokumentiert.
- Lassen Sie bei der Abgabe das Deckblatt und alle abgegebenen Blätter von der Aufsicht zusammenheften. Das Aufgabenblatt können Sie behalten.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*)

Gegeben sei eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$, $F = \{q_2\}$ und $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ wie folgt:

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, N)$
q_1	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_2, 1, N)$
q_2	$-$	$-$	$-$

Ein waagerechter Strich bedeutet, dass die Turingmaschine stoppt, d. h. $\delta(q, a) = (q, a, N)$ für $q \in Q$ und $a \in \Gamma$.

a) Geben Sie die vollständige Konfigurationsfolge der Maschine M angesetzt auf die Eingabe 11001 an.

b) Beschreiben Sie in Worten die von M berechnete Funktion.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Ein Wort $w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n \in \Sigma^*$ heißt *Palindrom*, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $w_i = w_{n+1-i}$. Sei L_{PAL} die Sprache aller Palindrome über $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie eine deterministische 2-Band-Turingmaschine an, die L_{PAL} entscheidet. Geben Sie neben der formalen Notation eine Beschreibung der Turingmaschinen an. Die Turingmaschine soll lineare Rechenzeit haben.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Sprache $H_S = \{\langle M \rangle \mid M$ angesetzt auf $\langle M \rangle$ hält$\}$.

Zeigen Sie: H_S ist nicht rekursiv.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

a) Sei L_1 eine rekursive Sprache und $L_2 \subseteq L_1$. Dann ist L_2 rekursiv.

b) Das Komplement $\overline{U}$ der universellen Sprache U ist nicht rekursiv aufzählbar.

c) Ist eine Instanz für PKP nicht lösbar, so ist sie nicht entscheidbar.

d) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{\langle M \rangle \mid$ die von der TM M berechnete Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist bijektiv$\}$. Die Sprache L ist rekursiv.

e) Es gilt: $n^2 \in O\left(2^{2 \log_2 n}\right)$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Eine Clique $V' \subseteq V$ in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt *nicht vergrößerbar*, wenn es keinen Knoten $v \in V \setminus V'$ gibt, so dass $V' \cup \{v\}$ eine Clique in G ist.

Zeigen Sie: In einem gegeben Graphen $G = (V, E)$ kann eine nicht vergrößerbare Clique in polynomialer Zeit berechnet werden.

Aufgabe 6 (*12 Punkte*)

Sei L eine Sprache über $\Sigma = \{0, 1\}$ und M eine nichtdeterministische Turingmaschine, die L akzeptiert. Ferner sei L' die Sprache $L' = \{w \in \Sigma^* \mid \exists \tilde{w} \in \Sigma^* : w\tilde{w} \in L\}$. Erweitern Sie M zu einer nichtdeterministischen Turingmaschine M', die L' akzeptiert.

Beschreiben Sie die Arbeitsweise der Maschine M' in Worten und formal. Geben Sie insbesondere für alle neu eingeführten Zustände die Übergangsrelation δ explizit an.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar* ($k \in \mathbb{N}$), wenn es eine Funktion $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass je zwei durch eine Kante verbundenen Knoten verschiedene Zahlen aus $\{1, \ldots, k\}$ zugeordnet werden.

Die Sprache FÄRBBARKEIT besteht aus allen Paaren (G, k) von ungerichteten Graphen G und natürlichen Zahlen k, für die G k-färbbar ist.

Zeigen Sie: FÄRBBARKEIT $\in NP$.

Aufgabe 8 (*12 Punkte*)

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem: Gegeben sei eine endliche Grundmenge (oder Universum) U, eine natürliche Zahl k, und eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen von U. Gibt es k Mengen aus $\mathcal{F}$, so dass deren Vereinigung die Menge U ergibt?

Die Sprache SET COVER besteht aus allen Instanzen dieses Entscheidungsproblems, für die die Antwort positiv ausfällt.

Zeigen Sie: SET COVER ist NP-vollständig.