max planck institut informatik

SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Benjamin Doerr, Dr. Reto Spöhel **Wintersemester 2011/12**
Übungsleitung: Alexander Kobel

Übung zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws11/grads/

Übungsblatt 2 Abgabe: Donnerstag, 3. November 2011, 12:00 Uhr

Hinweise zur Abgabe der Aufgaben: Schreiben Sie klar und deutlich in gebührendem Abstand zu weiterem Text Ihren **Namen** und **Matrikelnummer**, ihre **Übungsgruppe als arabische Ziffer** sowie den **Namen Ihres Tutors** auf Ihre Abgabe. **Heften** Sie mehrere Blätter geeignet zusammen. Legen Sie ihre Lösung bis zum Abgabetermin in den **unteren rechten Briefkasten** im Erdgeschoss von Gebäude E1 3 (neben Hörsaal 001). Achtung: Verwechseln Sie den Briefkasten nicht mit dem für die *Stammvorlesung* Algorithms and Data Structures!

Notation: $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots\}$.

Aufgabe 1 (*Schriftliche Übung, 4 Punkte*)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$.

a) Was ist $o(f) \cap \omega(f)$? Beweis!

b) Was ist der Zusammenhang zwischen den folgenden beiden Aussagen? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

   (i) $f \in O(g)$.

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ ist endlich.

Aufgabe 2 (*Schriftliche Übung, 4 Punkte*)

a) Seien $f, g, p, q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f \in O(g)$ und $p \in O(q)$. Zeigen Sie, dass $f \cdot p \in O(g \cdot q)$.

b) Seien f, g Polynomfunktionen mit positiven Leitkoeffizienten. Zeigen Sie, dass $f \in O(g)$ genau dann gilt, wenn der Grad von f nicht größer ist als der von g.

Bitte wenden...

Aufgabe 3 (*Schriftliche Übung, 2 Punkte*)

a) Für welche Paare f, g der folgenden Funktionen gilt $g \in \Theta(f)$ (ohne Beweis)? $n+1$, $n+\sqrt{n}-1$, $n\log_2(n)$, $n\sqrt{\log_2(n)}$, $\sqrt{n}\log_2(n)$, $\frac{n^2}{\log_2(n)}$, $n\log_{10}(n)+\sqrt{n}$, 2^n, 2^{2n}, 4^n, $4^{n+\sqrt{n}}$.

b) Bestimmen Sie (ohne Beweis) die asymptotische Laufzeit von

$$\begin{array}{l} \text{For } i = 1 \ldots n \\ \quad \text{For } j = 1 \ldots i \\ \quad\quad \text{For } k = 1 \ldots j \\ \quad\quad\quad \text{do } ☺ \end{array}$$

Aufgabe 4 (*Schriftliche Übung, 6 Punkte*)

Lesen Sie Abschnitt 1.4.2 im Skript und lösen Sie dann folgende Aufgaben.

a) Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $t(0) = 0$ und $t(n) = n - 1 + t(n-1)$ für alle $n \geq 1$. Geben Sie eine einfache, explizite Beschreibung von t an und beweisen Sie Ihre Aussage! Nutzen Sie dazu gerne Lemma 1.10.

b) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) \leq n - 1$ für alle $n \geq 1$, und sei $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Es gelte $f_1(0) = f_2(0) = 0$ und $f_i(n) = f_i(g(n)) + h(n)$ für alle $i = 1, 2$ und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $f_1 = f_2$ gilt. Nutzen Sie dazu nicht Lemma 1.10.

c) Sei, zusätzlich zur Notation der vorigen Teilaufgabe, $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f_3(0) \leq 0$ and $f_3(n) \leq f_3(g(n)) + h(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f_3(n) \leq f_1(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Sei ILog : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *(integer log)* definiert durch $\text{ILog}(0) = 0$ und $\text{ILog}(n) = \lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\text{ILog}(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

e) Beweisen Sie eine sinnvolle Schranke für die asymptotische Laufzeit von folgendem Algorithmus:

Algorithm 1: Mult

Input: $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$
Output: $a \cdot n$
if $n = 0$ **then**
    return 0
else
    if n *gerade* **then**
        return $\text{Mult}(a, \lfloor n/2 \rfloor) + \text{Mult}(a, \lfloor n/2 \rfloor)$
    else
        return $\text{Mult}(a, \lfloor n/2 \rfloor) + \text{Mult}(a, \lfloor n/2 \rfloor) + a$