max planck institut
informatik

Schnellste Wege
Wie funktioniert ein Navi?

Kurt Mehlhorn und Adrian Neumann
Max-Planck-Institut für Informatik

Vorlesung Ideen der Informatik

Schnellste Wege
Routenfinden im Navi

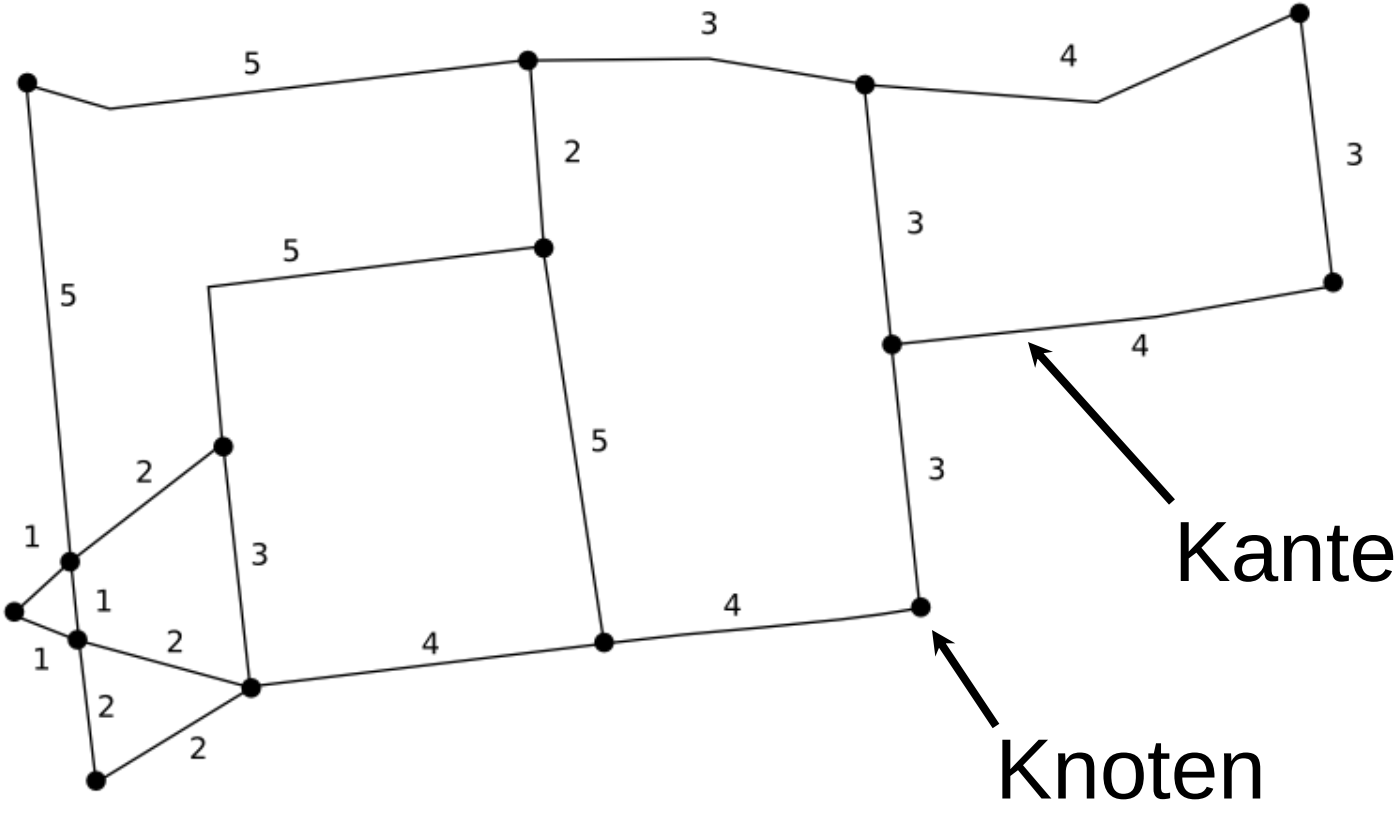
- Karten und Graphen
- Algorithmen für schnellste Wege
  - Erster Versuch
  - Dijkstras Algorithmus
- Aktuelle Forschung: Schnellste Wege in Straßengraphen

Landkarten

Landkarten enthalten sehr viel Information; nur Straßengraph ist wichtig

Graphen als Abstraktion

Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Jede Kante hat eine Fahrzeit.



G = (V,E), E Teilmenge V x V

Straßennetzwerke

- Europa: 24 Millionen Knoten, 58 Millionen Kanten
- Schnellste Wege kann man trotzdem in Sekunden berechnen
- Oder in Millisekunden nachschlagen

Grundidee

Wenn ich vom Startknoten in 30 Minuten nach X komme

und

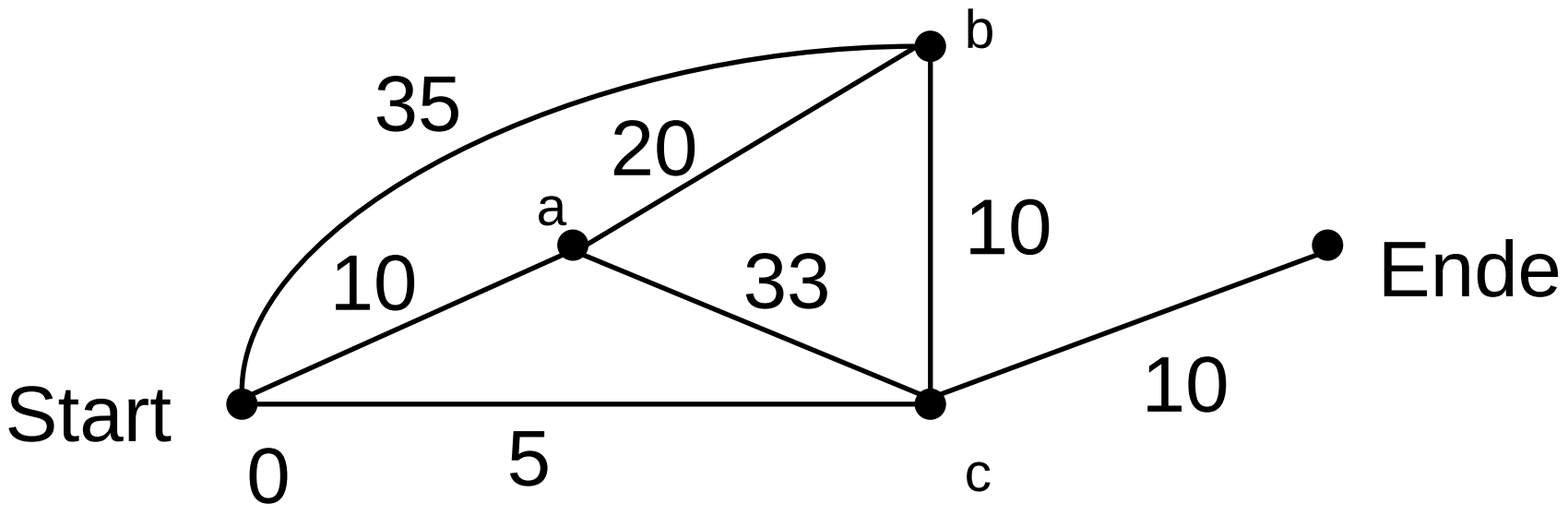
von X nach Y in 5 Minuten,

dann komme ich in 35 Minuten vom Startknoten nach Y.

Ein erster Algorithmus

1. Fahrzeit von Start nach Start = 0 Minut.
2. Für alle anderen Knoten, weiß ich noch keinen Weg: also Fahrzeit = unendlich
3. Falls Fahrzeit nach A = X Min und Straße A→B braucht Y Min, dann Fahrzeit nach B = min(X+Y,schon bekannte Fahrzeit nach B).
4. Wiederhole 3. solange noch eine Fahrzeit verbessert werden kann

Beispiel



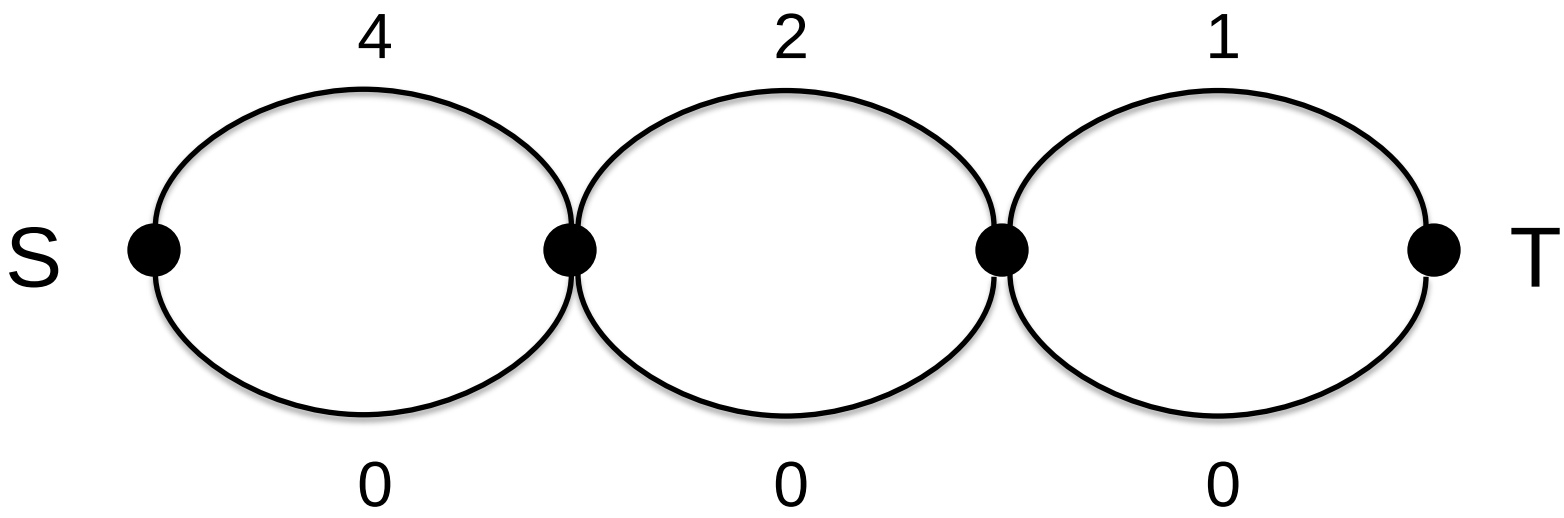
Fragen

- Finden wir so immer den schnellsten Weg?
- Wie lange dauert das?

Korrektheit

- Zu jeder Knotenmarkierung gibt es einen Pfad der entsprechenden Länge
- Solange die schnellste Verbindung nicht gefunden wurde, ist die Situation nicht stabil, denn auf dem kürzesten Weg von Start nach Ziel muss es einen ersten Knoten geben, für den berechnete Fahrzeit noch nicht minimal. Dort gibt es Verbesserungsmöglichkeit.

Effizienz



- Fahrzeit nach T wird 8 mal geändert
- Ein Ort mehr: Laufzeit verdoppelt sich

Exponentielles Wachstum ist ein Killer

- 4 Orte: 8 Änderungen
- 5 Orte: 16 Änderungen
- 6 Orte: 32
- 7 Orte: 64
- 21 Orte: mehr als 1.000.000
- 41 Orte: mehr als 1.000.000.000.000

Mein Rechner kann 10^9 Operationen/sec.

Geschicktes Auswählen

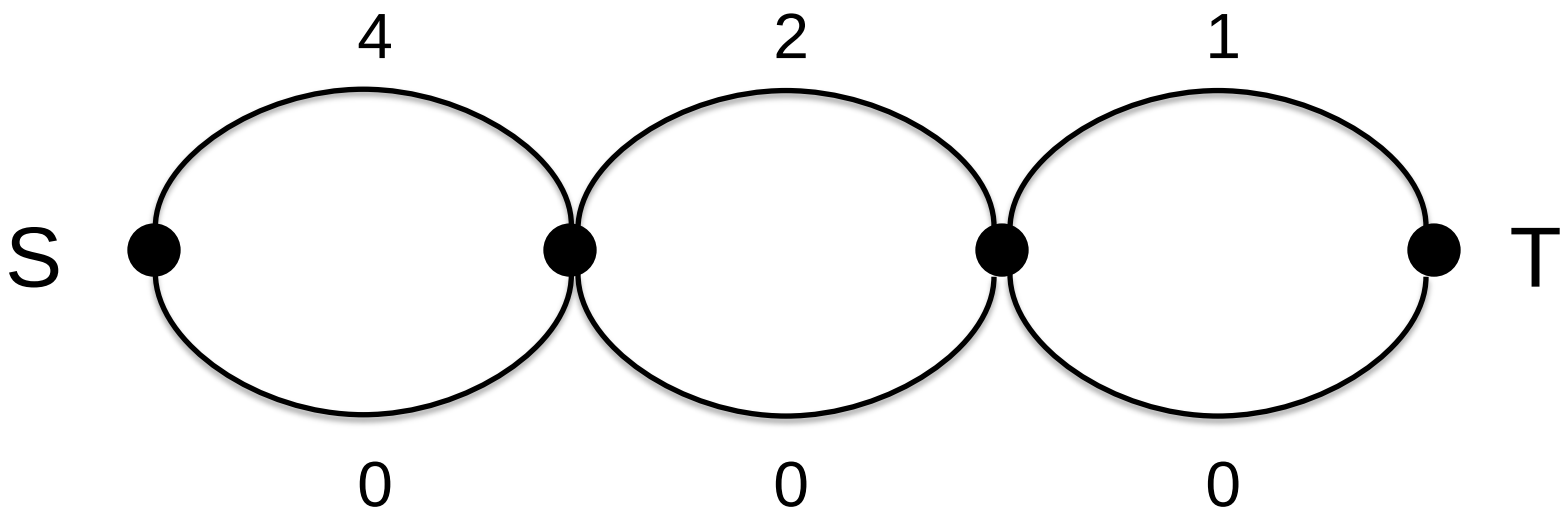
1. Nach S in 0
2. Wenn A in X und A→B braucht Y, dann B in X+Y Min
3. Wiederhole 2. solange nicht stabil

Wende 2. immer auf alle Kanten A→B aus dem Knoten A mit der kleinsten Fahrzeit an
(auf den wir das nicht schon vorher angewendet haben)

Dijkstras Algorithmus (1959)

Turing Award (1972)

Beispiel



Fahrzeit wird über jede Kante
nur einmal propagiert

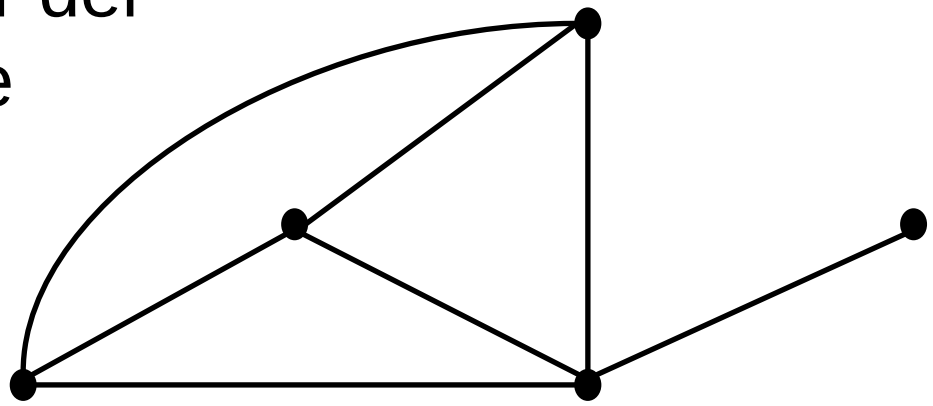
Pseudocode

Dijkstra(s): **dist[v] = beste bekannte Fahrzeit nach v**

```
dist[s] = 0 markiere s als aktiv
für alle v ≠ s:
        dist[v] = unendlich
        markiere v als aktiv
solange es aktiven Knoten gibt:
        u = der aktive Knoten mit kleinstem Wert dist[u]
        markiere u als nicht aktiv
        fuer alle Kanten (u,v) tue:
                falls dist[u] + Zeit(u,v) < dist[v]:
                        dist[v] = dist[u] + Zeit(u,v)
```

Speicherlayout

- Knoten = nummeriert von 0 bis n-1
- Kanten = nummeriert von 0 bis m-1; zuerst die Kanten aus 0 heraus, dann aus 1, …
- Für jede Kante: Ziel und Fahrzeit
- Für jeden Knoten: Nummer der ersten ausgehenden Kante



Anmerkungen

- u = der aktive Knoten mit kleinstem Wert dist[u]

ist ausführlicher

```
mindist = unendlich
Für i = 0 bis n – 1 tue
    falls (aktiv[i] und dist[i] < mindist)
    dann mindist = dist[i]; u = i;
```

- Pfade mitberechnen
- Wellenausbreitung

Korrektheit

- Immer: dist[v] ≥ kürzeste Fahrzeit von s nach v
- Beh: dist[v] = …, wenn v deaktiviert wird
- Bew durch Induktion über Anzahl der Kanten im schnellsten Weg nach v
- Anzahl = 0, dann v = s, also Beh. richtig
- Anzahl > 0, sei uv die letzte Kante auf schnellstem Weg nach v. Dann stimmt Beh. für u. Wenn u deaktiviert wird, gilt

  dist[u] = Fahrzeit nach u < Fahrzeit nach v ≤ dist[v].
- Also ist v noch aktiv, wenn u deaktiviert wird. Wenn u deaktiviert wird, setzen wir

  dist[v] = dist[u] + Fahrzeit(u,v) = Fahrzeit(v)

Laufzeit

n = #Knoten, m = #Kanten,
m_u = Kanten aus u heraus

Dijkstra(s):

dist[s] = 0
für alle v ≠ s:
    dist[v] = unendlich
    markiere v als aktiv
} ~n

solange es aktiven Knoten gibt:
~n {
    u = der aktive Knoten mit kleinstem Wert dist[u]
    markiere u als nicht aktiv
    fuer alle Kanten (u,v) tue:
~m_u {
        falls dist[u] + Zeit(u,v) < dist[v]:
            dist[v] = dist[u] + Zeit(u,v)

Laufzeit

- n mal Minimum finden: n mal n = n^2
- Alle Kanten verfolgen: m

Insgesamt: $m + n^2$

Kann verbessert werden auf $m + n \log n$

Nachschlagen statt Denken

- Idee: Alle Wege vorberechnen
  - Europa: $24*10^6$ Knoten → ~10^{13} Wege
  - 24 Millionen mal Dijkstra → 10 Jahre rechnen
  - 1 kB/Weg → 10 Petabyte Speicherplatz
  - Ungefähr 1% von Googles gesamter Speicherkapazität
- Ganz so einfach geht es nicht

Transitknoten (Bast-Funke)

- Kurze Wege: on-the-fly mit Dijkstra
- Alle weiten Wege passieren eine kleine Menge von Transitknoten
  - Gesamtmenge der Transitknoten ist klein
  - Für jeden festen Startpunkt gibt es nur sehr wenige Transitknoten

Hannah Bast, Stefan Funke

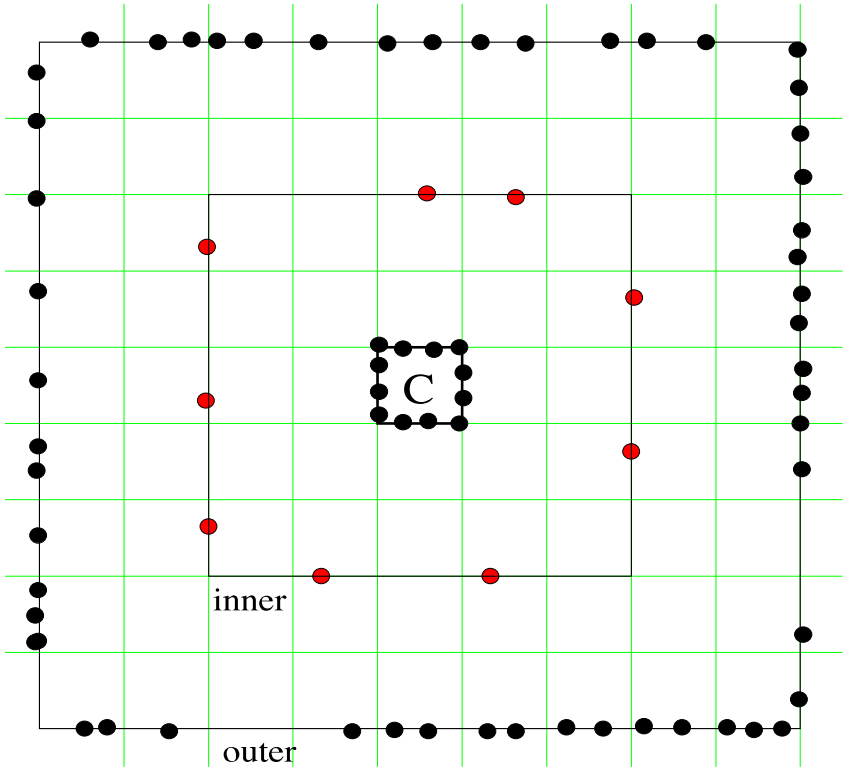
Saar LB Preis

Transitknoten

- KM wohnt in Scheidt
- Meine Transitknoten
  - nach Osten: Autobahn St. Ingbert
  - Nach Süden: Kleinblittersdorf
  - Nach Westen: goldene Bremm
  - Nach Norden-Westen: Stadtautobahn
  - Nach Norden und Nordosten: Autobahn Sulzbach
- Alle Bewohner von Scheidt benutzen die gleichen Transitknoten

Transitknoten

- Gitter über die Welt legen
- Für jede Zelle C Wege nach “outer” ausrechnen
- Die Knoten aus “inner”, die benutzt werden sind Transitknoten für C



Vorberechnen

- Für jeden Knoten zu seinen Transitknoten
  - Ungefähr 10/Knoten → $24*10^7$ Wege
  - 10kb/Weg → 250 GB
- Zwischen allen Transitknoten paarweise
  - Ungefähr 10000 Knoten → 10^8 Wege
  - 100kb/Weg → 10 TB
- Passt auf einen Server!

Wege Finden

- Kurze Wege: Dijkstra
- Lange Wege: A nach B
  - Zerlegen in A – T_1 – T_2 – B wobei T_1 Transitknoten für A und T_2 für B
  - Probiere alle Möglichkeiten für T1 und T2 (jeweils etwa 10) und bestimme den minimalen Wert von

    $dist(A,T_1) + dist(T_1,T_2) + dist(T_2,B)$
  - Das sind 10 + 10 + 100 Speicherzugriffe

Zusammenfassung

- Dijkstra ist ein sehr schneller Alg für kürzeste Wege (wenige Sekunden in Graph mit 10 Mio Knoten und 30 Mio Kanten.
- Straßengraphen haben Struktur (Hierarchie der Straßen, Fast-Planarität)
- Vorberechnen ist eine gute Idee, wenn man viele Anfragen zu beantworten hat.