Universität des Saarlandes
FR 6.2 Informatik

Prof. Dr. Kurt Mehlhorn, Adrian Neumann WiSe 2014/2015

Übungen zu Ideen der Informatik

http://resources.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws14/Ideen-der-Informatik/

Blatt 9 Abgabeschluss: 12.1.15

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)
Entscheidungsprobleme sind Probleme, bei denen die Antwort entweder Ja oder Nein lautet. Ein *Zertifikat* für diese Antwort erlaubt es Ihnen die Richtigkeit der Antwort zu überprüfen. Im Allgemeinen kann es unterschiedliche Zertifikate für die Ja bzw. für die Nein Antwort geben. Man möchte wenn möglich Zertifikate finden, die mit geringem Aufwand überprüft werden können.
Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem: Gegeben einen Graphen, kann man alle Knoten mit Hilfe von zwei Farben so färben, dass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben zeigen?
Es ist leicht zu sehen, dass man z. B. ein Dreieck nicht mit zwei Farben färben kann. Gleiches gilt auch für größere Kreise mit einer ungeraden Zahl von Knoten. Das ändert sich natürlich auch dann nicht, wenn an dem Kreis noch weitere Kanten oder Knoten hängen. Wenn ein Graph also einen solchen Kreis enthält, kann man ihn nicht färben.
Andersrum ist ein Graph färbbar, wenn es keinen solchen Kreis gibt. Das ist offensichtlich wenn es gar keine Kreise gibt. Wenn es gerade Kreise gibt, kann man den Graphen färben, indem man von jedem Kreis eine Kante löscht, den kreisfreien Graphen färbt, und dann die Kanten wieder einfügt. Diese Kanten können nicht zu Konflikten führen, da der verbindende Pfad im kreisfreien Graphen eine gerade Anzahl Knoten hat und die Endknoten somit verschiedene Farben haben.
Ein gutes Nein-Zertifikat ist also einen ungeraden Kreis im Graphen aufzuzeigen. Man braucht nur zu überprüfen, dass es sich wirklich um einen Kreis im Graphen handelt. Die Abwesenheit eines ungeraden Kreises zu zertifizieren ist schwieriger. Man könnte alle Kreise im Graphen auflisten, aber davon kann es exponentiell viele geben. Daher eignet sich das nicht direkt als Ja-Zertifikat. Zum Glück kann man als Ja-Zertifikat aber einfach eine zulässige Färbung des Graphen angeben. Durch Betrachten aller Kanten im Graphen kann man leicht feststellen, dass sie es wirklich keine gleichen Nachbarn gibt.
Versuchen Sie gute Ja-Zertifikate sowie Nein-Zertifikate für die folgenden Probleme zu finden. Sind sie einfach zu überprüfen? Von welchen Zertifikaten glauben Sie, dass sie schwierig zu finden sind? Versuchen Sie Ihre Argumente nach Möglichkeit ähnlich wie im obigen Beispiel zu entwickeln.

a) Gibt es einen Weg[1] der Länge *höchstens* k zwischen zwei Knoten u und v in einem Graphen?

[1] Ein Weg der Länge k ist eine Folge von Knoten $x_0, \ldots, x_k$, so dass sich keine zwei Knoten wiederholen und stets eine Kante zwischen aufeinanderfolgenden Knoten ist.

b) Gibt es einen Weg der Länge *mindestens* k zwischen zwei Knoten u und v in einem Graphen?

c) Für eine feste Sequenz von Tetris-Blöcken: Kann man so spielen, dass man mehr als k Punkte erreicht?

d) Gegeben einen Graphen G, kann man G auf ein Blatt Papier zeichnen, ohne dass sich Kanten kreuzen?

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Sie sind der Manager für zwei identische Arbeiter, X und Y. Ihre Firma bekommt im Laufe des Tages nach und nach Aufträge A, die sie an X und Y verteilen müssen. Natürlich wissen Sie nichts von den Aufträgen, bevor sie eingehen. Jeder Auftrag A_i geht zur Zeit t_i ein und braucht Zeit w_i um bearbeitet zu werden und muss sofort zugeteilt werden. Ein Auftrag, der einmal zugeteilt wurde, kann dem Arbeiter nicht mehr weggenommen werden. Es ist Feierabend, wenn der letzte Arbeiter seinen letzten Auftrag fertig gestellt hat.
Eine einfache Strategie zum Verteilen der Aufträge ist es, den Auftrag immer dem Arbeiter zu geben, der augenblicklich am wenigsten Aufträge hat, also als erster fertig würde, kämen keine neuen Aufträge mehr rein.

a) Wie ordnet die einfache Strategie die Aufträge mit Arbeitsaufwand $w_1 = 10, w_2 = 20, w_3 = 10, w_4 = 30, w_5 = 40, w_5 = 20$ und Eingangszeit $t_i = i$ den Arbeitern zu?

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem ein hellseherischer Manager, der Aufträge optimal zuteilen kann, die Aufträge mindestens 1.49 mal schneller abarbeiten lässt, als ihre einfache Strategie.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Sie wollen eine Party organisieren. Da ihr Freundeskreis recht groß ist, verstehen sich nicht alle ihrer Freunde untereinander. Um die Party angenehm zu gestalten, wollen Sie nur Personen einladen, die sich auch untereinander mögen.
Sie haben einen Raum gemietet, der x Personen fasst und möchten herausfinden, ob sie genug Freunde einladen können, um den Raum zu füllen.
Wir nehmen an, dass Sie wissen, welche Ihrer Freunde sich gegenseitig nicht mögen, und das „mögen" eine symmetrische Relation ist: A mag B genau dann, wenn B auch A mag.

a) Formulieren Sie das Party-Problem als ein Problem auf Graphen und skizzieren Sie einen kleinen Beispielgraphen, der Ihre Übersetzung erläutert.

b) Argumentieren Sie, warum dieses Problem in NP ist.

$*$) *Für Wagemutige:* Nehmen Sie an, Sie können Graphen effizient mit der minimalen Zahl Farben färben. Geben Sie ein Verfahren an, das das Party-Problem effizient löst.