Harald Ganzinger
Jürgen Stuber

Saarbrücken, 11. August 1997

Bemerkungen zur Klausur Informatik IV

Aufgabe 1

(a) Um die Allgemeingültigkeit von F zu beweisen, beginnt man mit $0\,F$. Vorherige Umformungen sind unnötig, die Negation steckt schon in der 0. Es ist sinnvoll, immer zuerst α-Regeln anzuwenden, damit spart man sich eine Menge Arbeit.

(b) Man beginnt mit $1\,F$, expandiert das Tableau und liest die DNF aus den offenen Pfaden ab.

Aufgabe 2

(a) Die erste Teilformel war genau dann wahr, wenn $P^{\mathcal{A}}$ Teilmenge von $Q^{\mathcal{A}}$ war; die zweite Teilformel war genau dann falsch, wenn $Q^{\mathcal{A}}$ Teilmenge von $P^{\mathcal{A}}$ war. Also war F falsch genau dann, wenn $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}}$.

(b) Hier durfte man nicht vergessen, die Interpretation von f anzugeben. Notation z.B. $f : a \mapsto b, b \mapsto a$.

Die Notation war teilweise etwas umständlich, z.B. kann man statt $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 0\}$ besser gleich $\mathbb{N}$ schreiben.

Manche haben versucht, das mit Resolution zu beweisen; das ist zwar im Prinzip möglich, aber sehr viel aufwendiger und fehleranfälliger. Man darf z.B. keine Resolutionsschritte übersehen, wenn man zeigt, daß die leere Klausel nicht herleitbar ist.

Aufgabe 3

Häufige Fehler: Negation am Anfang vergessen, beim Skolemisieren von y in $\forall x \exists y$ Konstante für y eingesetzt, beim Unifizieren nichtvariable Terme substituiert.

In $(\forall x \exists y \ldots) \wedge (\exists w \ldots)$ ist es geschickt, das $\exists w$ zuerst nach vorne zu ziehen, da man dann eine Skolemkonstante statt einer Skolemfunktion bekommt. Oder man konnte direkt in der Negationsnormalform Skolemisieren (Aufgabe 6.1). Unterhalb einer Negation geht das aber nicht!

Um den Resolutionsbeweis leicht zu finden, war es günstig mit der "Zielklausel" $\{\neg R(f(f(a)), z)\}$ zu beginnen.

Aufgabe 4

f monoton: $\forall x \forall y\, (x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y))$ Viele haben $\wedge$ statt $\rightarrow$ geschrieben. Eine gute Daumenregel ist, daß $\rightarrow$ bei $\forall$ und $\wedge$ bei $\exists$ steht. Z.B. drückt man "für alle x mit Eigenschaft P gilt Q" durch die Formel $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$, und "es existiert ein x mit Eigenschaft P für das Q gilt" durch die Formel $\exists x\, P(x) \wedge Q(x)$ aus.

Bild von f ist (geschlossenes) Intervall: $\exists x \exists y ((\forall z (x \leq f(z) \wedge f(z) \leq y)) \wedge (\forall w\, ((x \leq w \wedge w \leq y) \rightarrow \exists z\, f(z) = w)))$ Der erste Teil sagt, daß alle Werte von f im Intervall $[x, y]$ liegen ($R(f) \subseteq [x, y]$), der zweite Teil sagt, daß alle Werte aus dem Intervall auch im Bild von f liegen ($R(f) \supseteq [x, y]$). Die meisten haben den zweiten Teil vergessen. Viele haben auch die Quantoren vertauscht $\forall z \exists x \exists y$.

f hat einen Fixpunkt: $\exists x\, f(x) = x$.

Aufgabe 5

Dies ist ein Beispiel dafür, daß bestimmte Formeln (hier: universelle Hornformeln) unter einer bestimmten Konstruktion (hier: Produkt) ihre Gültigkeit behalten. Sätze dieser Art gibt es noch beliebig viele andere. Weitere einfache Konstruktionen sind z.B. der Übergang zu Teilstrukturen oder Faktorisieren.

(a) Ein einfacher Induktionsbeweis über den Aufbau von t. Basisfall t ist Variable geht mit (6) (einfach). Beim Induktionsschritt für $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ haben sich dann fast alle verhaspelt. So

Bitte wenden

geht's:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\times\mathcal{B})(f(t_1,\ldots,t_n)) &= f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((\mathcal{A}\times\mathcal{B})(t_1),\ldots,(\mathcal{A}\times\mathcal{B})(t_n)) && \text{Def } (\mathcal{A}\times\mathcal{B})(t)\\
&= f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((\mathcal{A}(t_1),\mathcal{B}(t_1)),\ldots,(\mathcal{A}(t_n),\mathcal{B}(t_n))) && \text{IV}\\
&= (f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1),\ldots,\mathcal{A}(t_n)), f^{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(t_1),\ldots,\mathcal{B}(t_n))) && (4)\\
&= (\mathcal{A}(t),\mathcal{B}(t))
\end{aligned}$$

Es gibt nur einen Term t, der aber in den drei Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ verschieden interpretiert wird. Viele haben hier die Ebene der Syntax (f, t) und die Ebene der Semantik ($f^{\mathcal{A}}$, $(\mathcal{A})(t)$) durcheinandergeworfen.

(b) Hier mußte man mit (6) zeigen, daß die Behauptung für x stimmt, und daß sich für den Rest (andere Variablen y, Funktions- und Prädikatensymbole) sich nichts ändert.

(c) Das ging ähnlich wie (a) mit (5).

(d) Hier mußte man alle Belegungen betrachten und dann die Struktur der Hornformel ausnutzen. Die Behauptung gilt nicht für alle Formeln, z.B. nicht für Disjunktionen.

Aufgabe 6
Hier kam $2n/(n+1)$ heraus. Es gab mehrere Lösungsmethoden, u.a.:

Multiplikation mit dem Faktor $(n+1)\cdot 2^n$, und für das S_n partielle Summation oder Verwenden einer Formel aus der Vorlesung.

Raten der Lösung anhand einiger berechneter Werte mit Beweis der Korrektheit durch Induktion.

Aufgabe 7
(a) Erwartungswert war $EX = 1/16$ und Varianz $VX = 175/256$.

(b) Die meisten haben hier $256X$ geschrieben, das würde aber ein Spiel um den 256-fachen Einsatz bedeuten. Richtiger wäre $X' = X_1 + \cdots + X_{256}$ gewesen, da es sich um 256 unabhängige Spiele mit der gleichen Verteilung wie X handelt. Für den Erwartungswert macht das nichts, in beiden Fällen gilt $E(256X) = E(X') = 256EX = 16$. Bei der Varianz gilt $VX' = 256VX = 175$, viele hatten aber $V(256X) = 256^2VX = 256\cdot 175$. Für Tschebyscheff ist die Differenz $48 - EX = 32$, also bekommt man $\Pr((X-EX)^2 \geq 1024) \leq VX/1024 \sim 17\%$. Da sind auch noch die Verluste für Alice von 16 oder mehr dabei, das kann man hier aber wegen fehlender Symmetrie nicht vermeiden.

Allgemeine Bemerkungen

Es fällt auf, daß die meisten von Euch zwar recht gut die Formalismen (Tableaux, Resolution, Lösen von Summen) anwenden können, sich aber mit dem tieferen Verständnis der Materie schwertun (z.B. Aufgaben 5 und 7). Für die mündliche Prüfung ist es viel wichtiger als für die Klausur, daß ihr auch die Zusammenhänge versteht, und wißt, warum die Verfahren funktionieren. Insbesondere solltet ihr Euch in den wichtigen Beweisen (Kompaktheit, Vollständigkeitsbeweis, Skolemisieren) auskennen.