Harald Ganzinger
Jürgen Stuber Saarbrücken, 25.7.97

Klausur Informatik IV

Als Hilfsmittel zugelassen sind das Schöning-Buch, Unterlagen aus den Übungen und handschriftliche Notizen, keine Rechner. Die in der Vorlesung und in den Übungen bewiesenen Sätze dürfen benutzt werden. Es gibt 7 Aufgaben mit insgesamt 140 Punkten. Du hast drei Stunden Zeit.

Aufgabe 1 (20P)
Benutze Tableaux,

(a) um die Allgemeingültigkeit von $((A \to C) \vee (B \to D)) \to ((A \wedge B) \to (C \vee D))$ zu zeigen, und

(b) um eine disjunktive Normalform von $((A \to B) \wedge (\neg A \to C)) \wedge \neg(B \wedge C)$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 (20P)
Zeige, daß die Formeln

$$(\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))) \to (\exists x (\neg P(x) \wedge Q(x))) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y (P(f(x), y) \to P(x, f(y))) \tag{2}$$

weder allgemeingültig noch unerfüllbar sind.

Aufgabe 3 (20P)
Zeige mit Hilfe von Resolution, daß

$$(\forall x (P(x) \to \exists y (P(f(x)) \wedge R(f(x), y)))) \to \forall x (P(x) \to \exists z\, R(f(f(x)), z))$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 4 (20P)
Sei $\leq$ ein Prädikatensymbol für eine totale Ordnung, und f ein einstelliges Funktionssymbol. Gib in Prädikatenlogik mit Gleichheit eine Formel an, die den folgenden Sachverhalt beschreibt:

Wenn f monoton steigend ist, und das Bild von f ein Intervall ist,
dann hat f einen Fixpunkt.

Aufgabe 5 (20P)
Wir definieren das *Produkt* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ von zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ durch

$$U_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}} \times U_{\mathcal{B}} \tag{3}$$

$$f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \tag{4}$$

$$((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in P^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} \text{ g.d.w. } (a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathcal{A}} \text{ und } (b_1, \ldots, b_n) \in P^{\mathcal{B}} \tag{5}$$

$$x^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} = (x^{\mathcal{A}}, x^{\mathcal{B}}) \tag{6}$$

für alle Funktionssymbole f, Prädikatensymbole P, Variablen x und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$ und $b_1, \ldots, b_n \in U_{\mathcal{B}}$.

(a) Zeige, daß $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})(t) = (\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t))$ für alle Terme t gilt.

Bitte wenden

(b) Zeige $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_{[x/(a,b)]} = \mathcal{A}_{[x/a]} \times \mathcal{B}_{[x/b]}$ für alle Variablen x und Elemente $a \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{U}_\mathcal{B}$.

(c) Zeige, daß ein Atom $P(t_1, \ldots, t_n)$ genau dann in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ wahr ist, wenn es in $\mathcal{A}$ und in $\mathcal{B}$ wahr ist.

(d) Sei F eine universell quantifizierte Hornformel, d.h. F hat die Form $\forall x_1 \ldots \forall x_k (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow A)$, wobei $A_1, \ldots, A_n$ und A Atome der Form $P_i(t_{i1}, \ldots, t_{in_i})$ sind; und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von F.

Zeige, daß $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ein Modell von F ist.

Aufgabe 6 (20P)
Bestimme eine geschlossene Form für die Rekurrenz

$$T_0 = 0 \tag{7}$$

$$T_n = \frac{n}{2(n+1)} T_{n-1} + 1 \tag{8}$$

Aufgabe 7 (20P)
Alice (A) und Bob (B) spielen Stein-Schere-Papier. Sie wählen unabhängig voneinander Stein, Schere oder Papier mit den Wahrscheinlichkeiten in der linken Tabelle; der Gewinn für Alice ist in der rechten Tabelle angegeben:

	Stein	Schere	Papier
Alice	1/2	1/4	1/4
Bob	1/4	1/2	1/4

		Bob		
		Stein	Schere	Papier
	Stein	0	1	−1
Alice	Schere	−1	0	1
	Papier	1	−1	0

(a) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz für den Gewinn G von Alice.

(b) Wie sind der Erwartungswert und die Varianz für 256 Spiele? Bestimme mit der Tschebyscheffschen Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß Alice bei 256 Spielen einen Gesamtgewinn von 48 oder mehr bekommt.