Harald Ganzinger
Jürgen Stuber

Saarbrücken, 5.9.97

Nachklausur Informatik IV

Als Hilfsmittel zugelassen sind das Schöning-Buch, Unterlagen aus den Übungen und handschriftliche Notizen, keine Rechner. Die in der Vorlesung und in den Übungen bewiesenen Sätze dürfen benutzt werden. Es gibt 7 Aufgaben mit insgesamt 140 Punkten. Du hast drei Stunden Zeit.

Aufgabe 1 (20P)
Benutze Tableaux,

(a) um die Allgemeingültigkeit von $(A \vee B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B)))$ zu zeigen, und

(b) um die Modelle von $(A \rightarrow B) \wedge ((B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A))$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 (20P)

(a) Zeige, daß die Formel $(\forall x \exists y\, R(x,y)) \wedge \neg \exists x\, R(x,x)$ weder allgemeingültig noch unerfüllbar ist.

(b) Gib ein Herbrandmodell für die Formel $\forall x (P(a) \wedge (P(x) \vee P(f(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(f(x))))$ an.

Aufgabe 3 (20P)
Zeige mit Hilfe von Resolution, daß für eine binäre Relation aus Serialität, Symmetrie und Transitivität die Reflexivität folgt.

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y\, R(x,y) && (\textit{Serialität}) \\ &\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) && (\textit{Symmetrie}) \\ &\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)) && (\textit{Transitivität}) \\ &\forall x\, R(x,x) && (\textit{Reflexivität}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (20P)
Sei L eine Sprache mit der Konstante 1 und den zweistelligen Funktionssymbolen $\cdot$ (Multiplikation) und *ggt* (größter gemeinsamer Teiler), und den Prädikatensymbolen $=$ (Gleichheit), $|$ (Teilbarkeit) und *prim* (ist prim). Formalisiere die folgenden Aussagen:

(a) $x \mid y$ gilt genau dann, wenn x ein Teiler von y ist.

(b) $prim(x)$ gilt genau dann, wenn x prim ist.

(c) $ggt(x,y)$ ist der größte gemeinsame Teiler von x und y.

Hinweis: (a) kann in (b) und (c) verwendet werden.

Aufgabe 5 (20P)
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur und $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $U_{\mathcal{A}}$. Wir definieren $\mathcal{A}/\sim$ durch

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}/\sim} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}/\sim = \{[a] \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} \quad (1)$$

$$f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)] \quad (2)$$

$$([a_1], \ldots, [a_n]) \in P^{\mathcal{A}/\sim} \text{ g.d.w. } a_1' \in [a_1], \ldots, a_n' \in [a_n] \text{ existieren, mit } (a_1', \ldots, a_n') \in P^{\mathcal{A}} \quad (3)$$

$$x^{\mathcal{A}/\sim} = [x^{\mathcal{A}}] \quad (4)$$

Bitte wenden

für alle Funktionssymbole f, Prädikatensymbole P, Variablen x und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Dabei sei $[a]$ die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$.

Eine Kongruenzrelation ist eine Äquivalenzrelation, für die zusätzlich $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \sim f^{\mathcal{A}}(a_1', \ldots, a_n')$ aus $a_1 \sim a_1', \ldots, a_n \sim a_n'$ folgt.

(a) Zeige, daß $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1], \ldots, [a_n])$ wohldefiniert ist, d.h. daß das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $a_1, \ldots, a_n$ aus den Kongruenzklassen $[a_1], \ldots, [a_n]$ ist.

(b) Zeige, daß $(\mathcal{A}/\sim)(t) = [\mathcal{A}(t)]$ für alle Terme t gilt.

(c) Zeige $(\mathcal{A}/\sim)_{[x/[a]]} = \mathcal{A}_{[x/a]}/\sim$ für alle Variablen x und Elemente $a \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.

(d) Sei F eine universell quantifizierte atomare Formel, d.h. F hat die Form $\forall x_1 \ldots \forall x_k P(t_1, \ldots, t_n)$, und sei $\mathcal{A}$ Modell von F.

Zeige, daß $\mathcal{A}/\sim$ ein Modell von F ist.

Aufgabe 6 (20P)

Bestimme eine geschlossene Form für die Rekurrenz

$$T_0 = 0 \tag{5}$$

$$T_n = \frac{1}{n} T_{n-1} + n \tag{6}$$

Hinweis: Betrachte $\Delta x!$.

Aufgabe 7 (20P)

Beim Roulette gelten für einfache Chancen(gerade/ungerade, manque/passe, rot/schwarz) die folgenden Regeln: Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der beiden Möglichkeiten eintrifft, ist 1/2 (bei 0 bleibe der Einsatz liegen). Wenn das Gesetzte eintrifft, bekommt man den doppelten Einsatz zurück, sonst bekommt man nichts.

Eine oft diskutierte „Gewinn“-Strategie ist es, auf eine einfache Chance (z.B. rot) zu setzen, und nach jedem Verlust den Einsatz zu verdoppeln, bis man gewinnt. D.h. man beginnt z.B. mit Einsatz 1 auf rot, bekommt nichts, setzt 2 auf rot, bekommt nichts, setzt 4 auf rot und bekommt 8. Dann hat man $8 - 4 - 2 - 1 = 1$ gewonnen. In der Praxis gibt es aber Grenzen, entweder weil es ein Limit für die Gebote gibt, oder weil dem Spieler das Geld ausgeht. D.h. der Spieler kann die Strategie höchstens n Züge lang spielen, und wenn er bis dahin nicht gewonnen hat, verliert er alle Einsätze.

Sei also n vorgegeben, und der erste Einsatz sei a.

(a) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum, Verteilung und die Zufallsvariable für den Gewinn bzw. Verlust des Spielers an.

(b) Wie groß sind Gewinnerwartung und Varianz?

(c) Wie groß sind Erwartungswert und Varianz für den Gesamtgewinn, wenn der Spieler diese Strategie k-mal spielt?