Harald Ganzinger
Jürgen Stuber

Saarbrücken, 20.5.97
Abgabe bis Dienstag, 27.5.97, 12:05 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Informatik IV

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (8P)

In der Praxis ist es günstig, wenn die beim Skolemisieren eingeführten Funktionen eine möglichst geringe Stelligkeit haben. Betrachte dazu die Variante der Bildung der Klauselnormalform, die in folgenden Schritten vorgeht (vgl. auch Aufgabe 65 im Schöning-Buch):

(1) Bereinige die Formel. D.h. benenne die Variablen so um, daß eine Variable entweder nur frei vorkommt, oder ein Quantor alle ihre Vorkommen bindet. Füge für Existenzquantoren für die freien Variablen ein.

(2) Bilde die Negationsnormalform, in der die Negation nur noch direkt über Atomen auftreten kann.

(3) Skolemisiere wie folgt: Für jeden Existenzquantor $\exists x$ ersetze alle Vorkommen von x durch eine Skolemfunktion $f_x(y_1, \ldots, y_k)$, wobei f_x in der Formel noch nicht vorkommt, und $\forall y_1, \ldots, \forall y_k$ die Allquantoren sind, in deren Bindungsbereich $\exists x$ liegt.

(4) Überführe die skolemisierte Formel in Pränexform.

(5) Überführe die Matrix der Formel in konjunktive Normalform.

(a) Welche Äquivalenzen muß man jeweils bei den Schritten (2), (4) und (5) anwenden?

(b) Zeige, daß (3) die Erfüllbarkeit erhält.

(c) Forme die Formel $\neg((\forall x \exists y\, P(x,y)) \wedge \exists x((\forall y\, Q(x,y) \rightarrow (\forall y\, R(x,y)))))$ nach dieser Methode in Normalform um. Kann man die gleiche Normalform auch erreichen, wenn man zuerst die Pränexform bildet und dann skolemisiert?

(d) Gib ein Beispiel an, bei dem die hier definierte Normalform auf jeden Fall in obigem Sinne besser ist, als wenn man zuerst die Pränexform bildet und dann skolemisiert.

Aufgabe 6.2 (4P)

Zeige, daß Skolemisieren die logische Äquivalenz nicht erhält.

Aufgabe 6.3 (8P)

Sei EQ die Menge der folgenden Axiome für Gleichheit:

$$\forall x\, x = x \tag{1}$$

$$\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z\, (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z) \tag{3}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k\, (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_k = y_k \rightarrow f_i^k(x_1, \ldots, x_k) = f_i^k(y_1, \ldots, y_k)) \tag{4}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k\, (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_k = y_k \wedge P_i^k(x_1, \ldots, x_k) \rightarrow P_i^k(y_1, \ldots, y_k)) \tag{5}$$

Dabei sind (4) und (5) für alle $i, k \in \mathbb{N}$ in EQ enthalten.

Zeige, daß eine Formelmenge M genau dann in Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit erfüllbar ist, wenn $M \cup EQ$ in Prädikatenlogik erster Stufe erfüllbar ist. Bei letzterem ist $=$ als gewöhnliches zweistelliges Prädikatensymbol zu verstehen.

Hinweis: Betrachte in dem Modell für $M \cup EQ$ die Äquivalenzklassen bzgl. $\mathcal{A}_=$.