Harald Ganzinger
Jürgen Stuber

Saarbrücken, 3.6.97
Abgabe bis Dienstag, 10.6.97, 12:05 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Informatik IV

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (8P)

In der Vorlesung wurde das folgende regelbasierte Unifikationsverfahren vorgestellt:

Um eine Menge $\{L_1, \ldots, L_k\}$ von Literalen zu unifizieren, beginne mit der Menge von Gleichungen $\{L_1 = L_2, \ldots, L_1 = L_k\}$. Forme die Gleichungen gemäß der folgenden Regeln um (Mengenklammern lassen wir weg):

$$t = t, \mathcal{L} \to \mathcal{L} \tag{1}$$

$$f(\ldots) = g(\ldots), \mathcal{L} \to \bot \qquad \text{falls } f \neq g \tag{2}$$

$$f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n), \mathcal{L} \to t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n, \mathcal{L} \tag{3}$$

$$x = t, \mathcal{L} \to \bot \qquad \text{falls } x \neq t,\ x \in var(t) \tag{4}$$

$$x = t, \mathcal{L} \to x = t, \mathcal{L}[x/t] \qquad \text{falls } x \notin var(t),\ x \in var(\mathcal{L}) \tag{5}$$

Dabei sollen Orientierung und Reihenfolge der Gleichungen keine Rolle spielen. Am Ende erhält man als *gelöste Form* entweder $\bot$, d.h. es gibt keinen Unifikator, oder $x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n$ und kein x_i kommt in einem t_i vor, d.h. der allgemeinste Unifikator ist $[x_1/t_1] \ldots [x_n/t_n]$.

Für ein allgemeines Gleichungssystem $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$ ist eine *Lösung* eine Substitution σ, so daß $s_1\sigma = t_1\sigma, \ldots, s_n\sigma = t_n\sigma$ gilt. $\bot$ hat keine Lösung.

Man kann die Korrektheit des Verfahrens mit den folgenden Teilschritten zeigen:

(a) Am Anfang ist die Menge der Unifikatoren des Unifikationsproblems gleich der Menge der Lösungen des Gleichungssystems.

(b) Bei jeder Regelanwendung bleibt die Menge der Lösungen gleich.

(c) Wenn das Gleichungssystem in gelöster Form und nicht $\bot$ ist, so ist die daraus abgelesene Substitution die allgemeinste Lösung.

(d) Solange das Gleichungssystem noch nicht in gelöster Form ist, kann man eine Regel anwenden.

(e) Das Verfahren terminiert nach endlich vielen Schritten.

Beweise (b) für die Regeln (1),(2) und (5), und beweise (d).

Aufgabe 8.2 (6P)

(a) Spezifiziere mit Hilfe einer geeigneten Formel F eine Relation $\mathsf{reverse}$ auf Listen, die die Umkehrung einer Liste beschreibt. Das geht analog zu append aus der Vorlesung:

$$\forall l, l', l'' \, (\mathsf{append}(\mathsf{nil}, l, l) \wedge (\mathsf{append}(\mathsf{cons}(e, l), l', \mathsf{cons}(e, l'')) \leftarrow \mathsf{append}(l, l', l'')))$$

append darf dabei verwendet werden.

(b) Die Struktur $\mathcal{A}$ habe als Universum die Menge der Binärbäume, und $\mathsf{append}^{\mathcal{A}} = \{(l, l', l'') \mid l'' = l \cdot l'\}$ und $\mathsf{reverse}^{\mathcal{A}} = \{(l, l') \mid l' = l^R\}$. Dabei wird das Rückgrat des Baumes als Liste aufgefaßt.

Zeige, daß $\mathcal{A}$ die Formel F erfüllt.

Bitte wenden

(c) Gib die Interpretation von reverse im kleinsten Herbrandmodell für F an.

Aufgabe 8.3 (6P)
Spezifiziere die leere Menge, die Vereinigung, den Durchschnitt und die Teilmengenrelation mit Hilfe der Elementrelation:

(a) Gib eine Formel F über den Funktionssymbolen empty (leere Menge), union (Vereinigung) und intersection (Durchschnitt), und den Relationssymbolen in (Element von) und subset (Teilmenge von) an, die die Beziehung zwischen den Mengenoperationen beschreibt.

(b) Zeige, daß in jedem Modell $\mathcal{B}$ von F mit $U_{\mathcal{B}} = D \cup \mathcal{P}(D)$ für eine beliebige Menge D und $\mathsf{in}^{\mathcal{B}} = \{(e, M) \mid e \in D,\ M \in \mathcal{P}(D) \text{ und } e \in M\}$ die anderen Symbole auf $\mathcal{P}(D)$ die Standardbedeutung haben.