Priv.-Doz. Dr. Alexander Bockmayr
Fachbereich 14 – Informatik
Universität des Saarlandes,
Max-Planck-Institut für Informatik

Optimierung (SS 1998)

13. Juli 1998

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: (20 Punkte)
Eine ganzzahlige Lösung des Ungleichungssystems

$$\begin{array}{ll} 0 \le x_e \le 1 & e \in E \\ \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 & v \in V \end{array}$$

entspricht einem perfekten Matching des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wobei $|V|$ gerade. Aus der Vorlesung ist bekannt, daß die konvexe Hülle der obigen $0-1$ Lösungen das Polytop P_M

$$\begin{array}{lcll} 0 \le x_e \le 1 & & & e \in E \\ \sum_{e\in\delta(v)} x_e & = & 1 & v \in V \\ \sum_{e\in\delta(U)} x_e & \ge & 1 & U \subseteq V, |U| \text{ ungerade} \end{array}$$

ist.
Zeige, daß P_M sich auch mit folgenden Ungleichungen beschreiben läßt:

$$\begin{array}{lcll} 0 \le x_e \le 1 & & & e \in E \\ \sum_{e\in\delta(v)} x_e & = & 1 & v \in V \\ \sum_{e\in E(U)} x_e & \le & \frac{|U|-1}{2} & U \subseteq V, |U| \ge 3, |U| \text{ ungerade}, \end{array}$$

wobei $E(U)$ die Kanten sind, die ganz in U verlaufen.

Aufgabe 2: (20 Punkte)
Chvátal-Gomory Schnittebenen:
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ein Polyeder und $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ mit $\lambda^T A \in \mathbb{Z}^n$. Zeige, daß die Ungleichung $(\lambda^T A)x \leq \lfloor \lambda^T b \rfloor$ für alle Punkte in $P \cap \mathbb{Z}^n$ gültig ist.
Sei ferner

$$P' = \bigcap_{c \in \mathbb{Z}^n,\ cx \leq \delta \text{ gültig für } P} cx \leq \lfloor \delta \rfloor.$$

P' heißt der *elementare Abschluß* von P. Zeige

$$P' = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq 0},\ (\lambda^T A) \in \mathbb{Z}^n} (\lambda^T A)x \leq \lfloor \lambda^T b \rfloor.$$

Aufgabe 3: (20 Punkte)
Betrachte das ganzzahlige Programm:

$$\begin{array}{llrcl}
\text{maximiere} & x_1 & +2x_2 & & \\
\text{u.d.N.} & -3x_1 & +4x_2 & \leq & 4 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 11 \\
 & 2x_1 & -x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Zeichne ein Bild, um die folgenden Fragen zu beantworten:

a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxation? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems?

b) Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems?

c) Illustriere das Gomory-Schnittebenenverfahren. Bestimme den ersten Schnitt.

d) Löse das Problem mit Branch-and-Bound. Löse die linearen Relaxationen graphisch.

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Formuliere das quadratische Optimierungsproblem

$$\max\{\sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{i,j} x_i x_j \mid x \in \{0,1\}^n\},$$

mit $q_{i,j} \in \mathbb{R}$ als lineares $0-1$ Problem.

Abgabe:	Bis Montag 20.7.98, vor der Vorlesung