Priv.-Doz. Dr. Alexander Bockmayr
Fachbereich 14 – Informatik
Universität des Saarlandes,
Max-Planck-Institut für Informatik

Optimierung (SS 1998)

4. Mai 1998

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Seien $a_1, \ldots, a_l$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Der von $a_1, \ldots, a_l$ aufgespannte *Kegel* ist die Menge

$$\mathcal{C}(a_1, \ldots, a_l) = \Big\{ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0 \Big\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zeichnen Sie den Kegel $\mathcal{C}((1,1)^T, (3,2)^T)$.
Gegeben sei nun das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rc} \text{maximiere} & c^T x \\ & Ax \leq b. \end{array}$$

Sei x^* eine zulässige Lösung und sei c im Kegel der bei x^* aktiven Constraints. Zeigen Sie: x^* ist optimal.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Formulieren Sie das Problem

$$\begin{array}{rrc} \max & \min_{i=1,\ldots k} & (c_i^T x + d_i) \\ & & Ax \leq b \end{array}$$

als lineares Optimierungsproblem.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Die *Kugel* $B_r(y)$ im $\mathbb{R}^n$ mit Radius $r \geq 0$ und Mittelpunkt $y \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x-y)^T(x-y) \leq r^2$, also alle Punkte die von y höchstens euklidischen Abstand r haben. Formulieren Sie ein lineares Programm welches die Kugel mit größtem Radius r berechnet, die in $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ enthalten ist. (*Hinweis: Aufgabe 2)*

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Betrachte das Polyeder $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ in Standardform, wobei A vollen Zeilenrang hat.

1. Zeige: Wenn zwei verschiedene Basen (im Sinne von Definition 2.12) B_1 und B_2 zu derselben Basislösung gehören (im Sinne der Prozedur zum Berechnen von Basislösungen), dann ist die Basislösung degeneriert.

2. Stimmt es, daß eine degenerierte Basislösung immer zu 2 oder mehr Basen gehört? Wenn nicht, finde ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 5: (5 Punkte)
(Adjazente Extrempunkte) Betrachten Sie das Polyeder $P = \{x \mid a_i^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ im $\mathbb{R}^n$. Seien u und v Extrempunkte von P mit $a_i^T u = a_i^T v = b_i$ für linear unabhängige $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Sei $L = \{\lambda u + (1-\lambda)v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ das Liniensegment zwischen u und v.
Zeige:

$$L = \left\{x \in P \mid \sum_{i=1}^{n-1} a_i x = \sum_{i=1}^{n-1} b_i, i = 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Ein solches Liniensegment heißt *Kante* von P.

Abgabe: Bis Montag 11.5.98, 14:00 in den Briefkasten "Vorlesung Optimierung" in der Eingangshalle des MPI (Gebäude 46).