Priv.-Doz. Dr. Alexander Bockmayr
Fachbereich 14 – Informatik
Universität des Saarlandes,
Max-Planck-Institut für Informatik

Optimierung (SS 1998)

11. Mai 1998

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Eine nichtleere Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex,* wenn für alle x, y aus S auch das Liniensegment $L(x,y) = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ in S liegt.
Zeigen Sie:

- Die Schnittmenge konvexer Mengen ist konvex.
- Ein Polyeder ist konvex.

Seien $x_1, \ldots, x_k$ Punkte aus $\mathbb{R}^n$. Eine *Konvexkombination* der $x_1, \ldots, x_k$ ist ein Punkt $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit nichtnegativen λ_i und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Die *konvexe Hülle* der Punkte $x_1, \ldots, x_k$ ist die Menge aller Konvexkombinationen der $x_1, \ldots, x_k$.

- Zeichnen Sie vier Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, daß kein Punkt in der konvexen Hülle der anderen drei Punkte liegt.
- Zeigen Sie: Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte ist konvex.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei $\min c^T x$, $x \in S$ ein Optimierungsproblem mit konvexem S. Sei x^* ein lokales Minimum des Problems, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $y \in S$ mit $\|x^* - y\| \leq \epsilon$, $c^T y \geq c^T x^*$ gilt.
Zeigen Sie: x^* ist optimal.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Betrachten Sie das Problem $\min c^T x$, wobei x aus einem Polyeder P ist.
Beweisen Sie:

- Eine zulässige Lösung x^* ist optimal genau dann, wenn für jede zulässige Richtung d für x^* gilt, daß $c^T d \geq 0$.
- Eine zulässige Lösung x^* ist die eindeutig optimale Lösung genau dann, wenn für jede zulässige Richtung $d \neq 0$ für x^* gilt, daß $c^T d > 0$.

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Beweisen Sie Bemerkung 3.4 aus der Vorlesung:
Für jedes $j \in B$ gilt $\bar{c}_j = 0$.

Abgabe: Bis Montag 18.5.98, 14:00 in den Briefkasten "Vorlesung Optimierung" in der Eingangshalle des MPI (Gebäude 46).