Priv.-Doz. Dr. Alexander Bockmayr
Fachbereich 14 – Informatik
Universität des Saarlandes,
Max-Planck-Institut für Informatik

Optimierung (SS 1998)

25. Mai 1998

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Stelle das zugehörige duale Problem auf:

$$\begin{array}{lrrrrcr}
\text{minimiere} & x_1 & -x_2 & & & & \\
\text{u.d.N.} & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\
& 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & -2x_4 & \geq & 3 \\
& -x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 6 \\
& & & & x_1 & \leq & 0 \\
& & & & x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Zeige: Wenn man in Polynomzeit entscheiden kann, ob ein rationales Ungleichungssystem eine rationale Lösung besitzt, und gegebenenfalls eine solche in Polynomzeit berechnen kann, dann kann man das Optimierungsproblem $\min c^T x, Ax \leq b$ mit rationalen A, b und c ebenfalls in polynomialer Zeit lösen.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Sei A eine symmetrische Matrix. Betrachte das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl}
\text{minimiere} & c^T x & & \\
\text{u.d.N.} & Ax & \geq & c \\
& x & \geq & 0
\end{array}$$

x^* erfülle $Ax^* = c$ und $x^* \geq 0$. Zeige: x^* ist eine optimale Lösung.

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Minimax Theorem:
Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *stochastisch*, wenn $x \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ gilt. Zeige:
Für jede $m \times n$ Matrix A gibt es stochastische Vektoren x^* und y^* mit

$$\max_x \min_y x^T Ay = \min_y x^{*T} Ay = \max_x x^T Ay^* = \min_y \max_x x^T Ay,$$

wobei Maxima und Minima über alle stochastischen Vektoren x bzw. y gebildet werden.
Hinweis: Zeige zuerst $\min_y x^T Ay = \min_j x^T A^{(j)}$ *für ein festes* x. *Dann erkennt man schon fast einen alten Freund!*
Das Minimax Theorem kommt aus der Spieltheorie. Dabei gibt es eine Matrix A, einen Zeilenspieler Z und einen Spaltenspieler S. Z wählt eine Zeile und S eine Spalte. Das dazugehörige Element in der Matrix ist der Betrag, den S an Z zahlen muß. Die stochastischen Vektoren repräsentieren randomisierte Strategien. Das Minimaxtheorem ist ein wichtiges Tool um untere Schranken randomisierter Algorithmen zu beweisen.

Abgabe:	Bis Mittwoch 3.6.98, 11:00 in den Briefkasten "Vorlesung Optimierung"