Priv.-Doz. Dr. Alexander Bockmayr
Fachbereich 14 – Informatik
Universität des Saarlandes,
Max-Planck-Institut für Informatik

Optimierung (SS 1998)

8. Juni 1998

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: (20 Punkte)
In dieser Aufgabe wird das Farkas-Lemma ohne den Simplexalgorithmus mit Hilfe der Fourier-Motzkin-Elimination bewiesen. Mit Aufgabe 2 aus Übungsblatt 6 folgt daraus auch der Dualitätssatz.
Die *Fourier-Motzkin-Elimination* ist ein Verfahren zur Variablenelimination in linearen Ungleichungssystemen.
Für eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$\pi_k(S) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \exists x_{k+1}, \ldots, x_n \text{ mit } (x_1, \ldots, x_n) \in S\}.$$

Mit der *Fourier-Motzkin-Elimination* kann man für ein Polyeder $P = \{x \mid Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge $\pi_{n-1}(P)$ berechnen. Eingabe ist dabei das Ungleichungssystem $Ax \leq b$. Der Algorithmus erfolgt in zwei Schritten.

1. Schreibe jeden Constraint $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i$ um in

$$a_{i,n} x_n \leq - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} x_j + b_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

   Falls $a_{i,n} \neq 0$, teile die Ungleichung auf beiden Seiten durch $a_{i,n}$. Da sich bei negativen $a_{i,n}$ das $\leq$ zu $\geq$ verwandelt, erhält man somit ein neues Ungleichungssystem, welches P beschreibt:

$$\begin{array}{rcll} x_n & \leq & d_i + f_i^T \bar{x}, & i \in M^+ \\ x_n & \geq & d_i + f_i^T \bar{x}, & i \in M^- \\ 0 & \leq & d_i + f_i^T \bar{x}, & i \in M^0, \end{array}$$

   wobei $d_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, M^+ die Indizes i mit positiven $a_{i,n}$ und M^-, M^0 sinngemäß die Indizes i mit negativen $a_{i,n}$ bzw. $a_{i,n} = 0$ sein sollen.

2. Sei Q das Polyeder im $\mathbb{R}^{n-1}$, das durch das folgende Ungleichungssystem beschrieben wird:

$$\begin{array}{rcll} d_j + f_j^T \bar{x} & \leq & d_i + f_i^T \bar{x}, & (j, i) \in M^- \times M^+ \\ 0 & \leq & d_i + f_i^T \bar{x}, & i \in M^0 \end{array} \tag{1}$$

Zeige nun:

1. $Q = \pi_{n-1}(P)$. Daraus folgt insbesondere, daß $\pi_{n-1}(P)$ wieder ein Polyeder ist.

2. Für jede Ungleichung $c^T \bar{x} \leq \delta$ aus (1) gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ mit $\lambda^T A = (c^T, 0)$ und $\lambda^T b = \delta$.

3. Ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ hat eine Lösung dann und nur dann, wenn es keinen Vektor $y \geq 0$ gibt mit $y^T A = 0$ und $y^T b < 0$. *Hinweis: Induktion über die Anzahl der Spalten und Anwenden von Punkt 2.*

4. Theorem 4.12 (Farkas' Lemma)

Aufgabe 2: (20 Punkte)
(ϵ-Perturbierung und Lexikographische Pivotregel)
Betrachte wieder ein Standardformproblem, wobei A vollen Zeilenrang hat. Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ sei

$$b(\epsilon) = b + \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon^2 \\ \vdots \\ \epsilon^m \end{pmatrix}.$$

Für jedes $\epsilon > 0$ sei das *ϵ-pertubierte* Problem das lineare Optimierungsproblem, welches durch das Ersetzen von b durch $b(\epsilon)$ entsteht.

1. Sei B eine Basismatrix. Zeige, daß die zugehörige Basislösung $x_B(\epsilon)$ des ϵ-perturbierten Problems die folgende Form hat:

$$B^{-1}[b|I] \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon^m \end{pmatrix}.$$

2. Zeige: Es gibt ein $\epsilon^* > 0$, so daß alle Basislösungen des ϵ-perturbierten Problems mit $0 < \epsilon < \epsilon^*$ nichtdegeneriert sind. *Hinweis: Ein Polynom $\neq 0$ in einer Variablen hat nur endlich viele Nullstellen.*

3. Angenommen alle Zeilen von $B^{-1}[b|I]$ sind lexikographisch positiv. Zeige, daß $x_B(\epsilon)$ eine zulässige Basislösung des ϵ-perturbierten Problems ist, für genügend kleines $\epsilon > 0$.

4. Betrachte eine zulässige Basis des Originalproblems und nimm an, daß alle Zeilen von $B^{-1}[b|I]$ lexikographisch positiv sind. x_j trete in die Basis ein und es sei $u = B^{-1}A^{(j)}$. Die austretende Variable sei nun folgendermaßen bestimmt: Für jede Zeile i mit $u_i > 0$ teile die i-te Zeile von $B^{-1}[b|I]$ durch u_i. Vergleiche die Ergebnisse lexikographisch und wähle die austretende Variable l, die der lexikographisch kleinsten Zeile entspricht. Zeige: Dies entspricht der eindeutigen Wahl der austretenden Variable des ϵ-perturbierten Problems für genügend kleines $\epsilon > 0$.

5. Schließe nun, daß die lexikographische Regel von oben die Terminierung des revidierten Simplexverfahrens garantiert.

Abgabe: Montag 15.6.98, vor der Vorlesung oder bis 14:00 in den Briefkasten Optimierung