Priv.-Doz. Dr. Alexander Bockmayr
Fachbereich 14 – Informatik
Universität des Saarlandes,
Max-Planck-Institut für Informatik

Optimierung (SS 1998)

22. Juni 1998

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (15 Punkte)
(Sensitivitätsanalyse) Beim Lösen eines linearen Optimierungsproblems $\min\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ entstehe das Tableau

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\hline
 & & 0 & 0 & \bar{c}_3 & 0 & \bar{c}_5 \\
\hline
x_2 = & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \beta \\
x_4 = & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & \gamma \\
x_1 = & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & \delta \\
\hline
\end{array}
$$

Nehme an, die letzten drei Spalten von A bilden eine Einheitsmatrix.

1. Gib notwendige und hinreichende Bedingungen für die Optimalität der Basis, die durch dieses Tableau gegeben wird, in Abhängigkeit von den Koeffizienten im Tableau.
2. Nimm an, die Basis ist optimal und $\bar{c}_3 = 0$. Finde eine optimale zulässige Basislösung, die von der durch das Tableau gegebenen verschieden ist.
3. Nimm an, daß $\gamma \geq 0$. Zeige, daß eine optimale zulässige Basislösung existiert, unabhängig von der Werten für $\bar{c}_3$ und $\bar{c}_5$.
4. Nimm an, die Basis des Tableaus ist optimal. Ersetze im Ausgangsproblem b_1 durch $b_1 + \epsilon$. Gib obere und untere Schranken für ϵ, so daß die Basis optimal bleibt.
5. Nimm an, die Basis des Tableaus ist optimal. Ersetze im Ausgangsproblem c_1 durch $c_1 + \epsilon$. Gib obere und untere Schranken für ϵ, so daß die Basis optimal bleibt.

Aufgabe 2: (15 Punkte)
(Charakterisierung volldimensionaler Polyeder)
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ ein beschränktes Polyeder, so daß alle Zeilen von A ungleich 0 sind. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. P ist volldimensional, d.h. $\mathrm{vol}(P) > 0$.
2. Es existiert ein Punkt x in P mit $Ax > b$.
3. Es gibt $n + 1$ Eckpunkte von P, die nicht alle in einer gemeinsamen Hyperebene liegen.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
(Minimale Schnitte)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$ und Gewichten c_e, für alle $e \in E$. Wir suchen eine Kantenmenge mit minimalem Gesamtgewicht, die jeden Pfad von s nach t schneidet. Sei $\mathcal{K}$ die Menge dieser Pfade. Eine mögliche Modellierung des Problems ist:

$$\begin{array}{rll} \min & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\ \text{u.d.N.} & \sum_{e \in K} x_e \geq 1, & \text{für alle } K \in \mathcal{K} \\ & 0 \leq x_e \leq 1, & \text{für alle } e \in E \end{array}$$

Die Eckpunkte des Zulässigkeitsbereichs sind Vektoren in $\{0, 1\}^n$ und eine optimale zulässige Basislösung entspricht einem minimalen Schnitt.
Zeige, daß das zugehörige Separationsproblem in polynomialer Zeit gelöst werden kann.

Abgabe: Montag 29.6.98, vor der Vorlesung oder bis 14:00 in den Briefkasten Optimierung