Universität Trier, **FB IV Informatik**

Viorica Sofronie-Stokkermans **January 3, 2005**

Übungen "Automatisches Beweisen"
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1
Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ mit $\Omega = \{b/0, f/1\}$ und $\Pi = \{p/1\}$.

(a) Wieviele verschiedene Herbrand-Interpretationen über Σ gibt es? Erläutern Sie kurz.

(b) Wieviele verschiedene Herbrand-Modelle besitzt die Formel

$$p(f(f(b))) \land \forall x\, (p(x) \to p(f(x))) \tag{1}$$

(c) Jedes Herbrand-Modell über Σ der Formel (1) ist auch ein Modell von

$$\forall x\, p(f(f(x))) \tag{2}$$

Geben Sie ein Beispiel einer Algebra an, die ein Modell von (1), aber nicht von (2) ist.

Aufgabe 8.2
Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, so daß Ω mindestens ein Konstantensymbol enthält; sei

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

eine Σ-Algebra. Ein Element $a \in U$ heißt *termgeneriert*, falls ein Σ-Grundterm t existiert, so daß $a = \mathcal{A}(\beta)(t)$ für irgendeine Zuweisung β. (Man beachte: falls t ein Grundterm ist, dann ist $\mathcal{A}(\beta)(t) = \mathcal{A}(\beta')(t)$ für alle Zuweisungen β und β'.) Die Menge aller termgenerierten Elemente von U wird durch $\hat{U}$ bezeichnet.

(a) Beweisen Sie: Falls $f/n \in \Omega$ und $a_1, \ldots, a_n \in \hat{U}$, dann ist $f(a_1, \ldots, a_n) \in \hat{U}$.

(b) Für $f/n \in \Omega$ und $a_1, \ldots, a_n \in \hat{U}$ definieren wir $f_{\hat{\mathcal{A}}}(a_1, \ldots, a_n) = f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$; für $p/m \in \Pi$ definieren wir $p_{\hat{\mathcal{A}}} = p_{\mathcal{A}} \cap \hat{U}^m$. Nach Teil (a) ist

$$\hat{\mathcal{A}} = (\hat{U},\ (f_{\hat{\mathcal{A}}} : \hat{U}^n \to \hat{U})_{f/n \in \Omega},\ (p_{\hat{\mathcal{A}}} \subseteq \hat{U}^m)_{p/m \in \Pi})$$

eine Σ-Algebra. Ein trivialer Induktionsbeweis zeigt, dass $\mathcal{A}(\beta)(G) = \hat{\mathcal{A}}(\beta)(G)$ für jede quantorenfreie Σ-Formel G und jede Zuweisung $\beta : X \to \hat{U}$.

Benutzen Sie dieses Resultat, um die folgende Proposition zu beweisen:

Falls F eine geschlossene pränexe Σ-Formel ohne Existenzquantoren ist, und $\mathcal{A} \models F$ gilt, dann gilt auch $\hat{\mathcal{A}} \models F$.

(c) Die Eigenschaft aus Teil (b) gilt nicht für Σ-Formeln mit Existenzquantoren. Geben Sie ein Beispiel einer Signatur Σ, einer Algebra $\mathcal{A}$ und einer geschlossenen pränexen Σ-Formel F so daß $\mathcal{A} \models F$, aber $\hat{\mathcal{A}} \not\models F$.

Aufgabe 8.3

Leiten Sie $\perp$ von der folgenden Klauseln ab, mit der Resolutionskalkül *Res*:

$$
\begin{aligned}
p(a) &\vee p(b) \\
\neg p(a) &\vee p(b) \\
p(a) &\vee \neg p(b) \\
\neg p(a) &\vee \neg p(b)
\end{aligned}
$$