2.8 Wohlfundierte Ordnungen

Für den Vollständigkeitsnachweis für Resolution brauchen wir das Konzept von wohlfundierten Ordnungen.

Eine strikte partielle Ordnung ist eine transitive und irreflexive Relation (nicht notwendig total; in unserem Kontext aber oft)

Eine strikte partielle Ordnung $\succ$ auf einer Menge M heißt wohlfundiert (Noethersch) gdw. es gibt keine unendliche absteigende Kette

$$a_0 \succ a_1 \succ \dots$$

in M.

1.8 Wohlfundierte Ordnungen

Ein $x \in M$ heißt minimal, wenn es kein y in M gibt, so daß $x \succ y$.

Notation

$\prec$ für die inverse Relation $\succ^{-1}$

$\succeq$ für die reflexive Hülle $\succ \cup =$ von $\succ$

$\succ$ strikte partielle Ordnung $\Rightarrow$ $\succeq$ partielle Ordnung

Beispiele

Natürliche Zahlen. $(\mathbb{N}, >)$

Lexikalische Ordnungen. Seien $(M_1, \succ_1), (M_2, \succ_2)$ wohlfundierte Ordnungen. Dann ist deren lexikalische Kombination

$$\succ = (\succ_1, \succ_2)_{lex}$$

auf $M_1 \times M_2$ wie folgt definiert:

$$(a_1, a_2) \succ (b_1, b_2) \ :\Leftrightarrow \ a_1 \succ_1 b_1 \text{ oder } a_1 = b_1 \ \& \ a_2 \succ_2 b_2$$

ebenfalls wohlfundiert (Beweis später).

Beispiele

Längenordnungen auf Wörtern. Für Alphabete Σ mit wohlfundierter Ordnung $>_\Sigma$ ist $\succ$, mit

$$w \succ w' \quad := \quad \begin{array}{l} \alpha)\ |w| > |w'| \text{ oder} \\ \beta)\ |w| = |w'| \text{ und } w >_{\Sigma,lex} w', \end{array}$$

eine wohlfundierte Ordnung auf Σ^* (Beweis später).

Gegenbeispiele. $(\mathbb{Z}, >)$;

$(\mathbb{N}, <)$;

die lexikographische Ordnung auf Σ^*

Elementare Eigenschaften wohlfundierter Ordnungen

Lemma 2.1 *$(M, \succ)$ wohlfundiert $\Leftrightarrow$ jedes $\emptyset \subset M' \subseteq M$ besitzt ein minimales Element.*

Elementare Eigenschaften wohlfundierter Ordnungen

Lemma 2.2

$(M_i, \succ_i)$ *wohlfundiert* , $i = 1, 2 \quad \Leftrightarrow \quad (M_1 \times M_2, (\succ_1, \succ_2)_{lex})$ *wohlfundiert.*

Beweis: (i) „$\Rightarrow$“: Ann.: $(M_1 \times M_2, (\succ_1, \succ_2)_{lex})$ ist nicht wohlfundiert. Sei $\succ = (\succ_1, \succ_2)_{lex}$. Dann gibt es eine unendliche Folge

$$(a_0, b_0) \succ (a_1, b_1) \succ (a_2, b_2) \succ \ldots \quad .$$

Betrachte $A = \{a_i \mid i \geq 0\} \subseteq M_1$. A hat minimales Element a_n, weil $(M_1, \succ_1)$ wohlfundiert. Dann hat aber $B = \{b_i \mid i \geq n\} \subseteq M_2$ kein minimales Element; *Widerspruch* zur Wohlfundiertheit von $(M_2, \succ_2)$.

(ii) „$\Leftarrow$“: ebenso einfach.

Noethersche Induktion

Sei $(M, \succ)$ wohlfundierte Ordnung.

Satz 2.3 (Noethersche Induktion) *Es gilt eine Eigenschaft $Q(m)$ für alle $m \in M$, falls für alle $m \in M$ folgende Implikation gilt:*

> *falls $Q(m')$, für alle $m' \in M$ mit $m \succ m'$,*[a]
> *dann $Q(m)$.*[b]

Beweis. Sei $X = \{m \in M \mid Q(m) \text{ falsch}\}$. Annahme: $X \neq \emptyset$. Da $(M, \succ)$ wohlfundiert, hat X dann ein minimales Element m_1. Damit gilt für alle $m' \in M$ mit $m' \prec m_1$ die Eigenschaft $Q(m')$. Weil aber speziell für m_1 die Implikation gilt, die im Satz vorausgesetzt wird, gilt damit auch $Q(m_1)$, also kann m_1 nicht in X sein. *Widerspruch*.

[a] Induktionsannahme

[b] Induktionsschluß

Multimengen

Sei M eine Menge. Eine Multimenge S über M ist eine Abbildung $S : M \to \mathbb{N}$. Hierbei gibt $S(m)$ die Anzahl der Vorkommen von Elementen m der Grundmenge M in der Multimenge S an.

m heißt Element von S, falls $S(m) > 0$.

Beispiel. $S = \{a, a, a, b, b\}$ ist Multimenge über $\{a, b, c\}$, wobei $S(a) = 3$, $S(b) = 2$, $S(c) = 0$.

Multimengen

Wir verwenden Mengennotation ($\in$, $\subset$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, usw.) in analoger Weise für MM, z.B:

$$\begin{aligned} (S_1 \cup S_2)(m) &= S_1(m) + S_2(m) \\ (S_1 \cap S_2)(m) &= \min\{S_1(m), S_2(m)\} \end{aligned}$$

Multimengen

Eine Multimenge heißt endlich, falls

$$|\{m \in M |\ s(m) > 0\}| < \infty,$$

für jedes m in M.

Im Folgenden betrachten wir nur endliche MM.

Multimengenordnungen

[$\succ_{mul}$]
Sei $(M, \succ)$ strikte partielle Ordnung. Die Multimengenerweiterung von $\succ$ auf Multimengen über M ist definiert durch

$$
\begin{aligned}
S_1 \succ_{mul} S_2 \;:\Leftrightarrow\; & S_1 \neq S_2 \\
& \text{und } \forall m \in M : [S_2(m) > S_1(m) \\
& \quad \Rightarrow \; \exists m' \in M : (m' \succ m \text{ und } S_1(m') > S_2(m'))]
\end{aligned}
$$

Satz 2.4

a) $\succ_{mul}$ *ist strikte partielle Ordnung.*

b) $\succ$ *wohlfundiert* $\Rightarrow \succ_{mul}$ *wohlfundiert*

c) $\succ$ *total* $\Rightarrow \succ_{mul}$ *total*