# Widerspruchsvollständigkeit von *Res*

**Satz 2.23** *Sei $\succ$ eine Klauselordnung, $N$ saturiert unter Res und $\bot \notin N$. Dann gilt $I_N^{\succ} \models N$.*

*Proof:*

Annahme: $\bot \notin N$ aber $I_N^{\succ} \not\models N$.

Sei $C \in N$ minimal (bzgl. $\succ$), so daß $I_N^{\succ} \not\models C$.

Weil $C$ falsch in $I_N$ ist $C$ nicht produktiv.

Wegen $C \neq \bot$ gibt es ein maximales Atom $A$ in $C$.

# Widerspruchsvollständigkeit von *Res*

**1. Fall:** $C = \neg A \vee C'$ (d.h. maximales Atom negativ)

$\Rightarrow I_N \models A$ und $I_N \not\models C'$

$\Rightarrow$ ein $D = D' \vee A \in N$ produziert A

$$\frac{D' \vee A \qquad \neg A \vee C'}{D' \vee C'}$$

liefert $D' \vee C' \in N$ mit $C \succ D' \vee C'$ und $I_N \not\models D' \vee C'$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Minimalität von $C$.

**2. Fall:** $C = C' \vee A \vee A \Rightarrow \frac{C' \vee A \vee A}{C' \vee A}$ liefert kleineres Gegenbeispiel $C' \vee A \in N$. Widerspruch.

# Widerspruchsvollständigkeit von *Res*

**Korollar 2.24** *Sei $N$ saturiert unter Res. Dann gilt $N \models \bot \;\Leftrightarrow\; \bot \in N$.*

# Kompaktheit der Aussagenlogik

**Satz 2.25 (Kompaktheit)** *Sei $N$ eine Menge aussagenlogischer Formeln. $N$ unerfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt $M \subseteq N$, $|M| < \infty$, $M$ unerfüllbar.*

*Beweis.* "$\Leftarrow$" trivial.

"$\Rightarrow$"

$N$ unerfüllbar $\Rightarrow$ $Res^*(N)$ unerfüllbar

$\Rightarrow$ (Vollständigkeit der Resolution) $\perp \in Res^*(N)$

$\Rightarrow \exists n \geq 0 : \perp \in Res^n(N)$

$\Rightarrow$ $\perp$ hat endlichen Resolutionsbeweis $B$ der Tiefe $n$.

Wähle als M die Menge der Annahmen (Blätter) in $B$. $\square$

# Lifting: Prinzip

- Substitutionen & “allgemeine”- Resolution
- Unifikation von Termen und Atomen
- Idee (Robinson 65):
  Gleichheit von Grundatomen wird verallgemeinert zu
  Unifizierbarkeit von allgemeinen Atomen

# Lifting: Prinzip

Der eigentliche Fortschritt durch (Robinson 65) besteht darin, daß durch Unifikation nur solche Grundklauseln bzw. Klauselinstanzen aufgezählt werden, die in einer Inferenz partizipieren. Andere Klauseln sind irrelevant für das Finden eines Widerspruchs. Außerdem werden Klauseln nicht sofort zu Grundklauseln instanziiert, sondern nur soweit, daß man resolvieren kann. Resolutionsinferenzen mit Klauseln mit Variablen entsprechen i.allg. einer unendlichen Menge von aussagenlog. Inferenzen, die man gleichzeitig berechnet.

# Unifikation

Sei $E = \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ ($s_i, t_i$ Terme oder Atome) eine Menge von Gleichheitsproblemen.

- Eine Substitution $\sigma$ heißt ein Unifikator von $E$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall 1 \leq i \leq n : s_i\sigma = t_i\sigma.$$

- Existiert ein Unifikator, so heißt $E$ unifizierbar.

- $\sigma$ heißt allgemeiner als $\tau$

$$\sigma \leq \tau \;:\Leftrightarrow\; \text{es gibt Subst.} \varrho : \varrho \circ \sigma = \tau$$

wobei $(\varrho \circ \sigma)(x) := \sigma(x)\varrho$ die Komposition von $\sigma$ und $\varrho$.

# Unifikation

**Proposition 2.26** 1. *Auf Substitutionen ist $\leq$ eine Quasiordnung, und $\circ$ ist assoziativ.*

2. *Falls $\sigma \leq \tau$ und $\tau \leq \sigma$ (dann schreiben wir auch $\sigma \sim \tau$), dann sind $x\sigma$ und $x\tau$ gleich bis auf (injektive) Variablenumbenennung, für alle $x$ in $X$.*

# Unifikation nach Martelli/Montanari

$$
\begin{aligned}
t \doteq t, E &\Rightarrow_{MM} E \\
f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n), E &\Rightarrow_{MM} s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n, E \\
f(\ldots) \doteq g(\ldots), E &\Rightarrow_{MM} \bot \\
x \doteq t, E &\Rightarrow_{MM} x \doteq t, E[t/x], \\
& \qquad \text{falls } x \in var(E), x \notin var(t) \\
x \doteq t, E &\Rightarrow_{MM} \bot, \text{ falls } x \neq t, x \in var(t) \\
t \doteq x, E &\Rightarrow_{MM} x \doteq t, E \text{ falls } t \notin X
\end{aligned}
$$

# Unifikation nach Martelli/Montanari

**Satz 2.27** *(i)* $E \Rightarrow^*_{MM} \perp \;\Leftrightarrow\; E$ *nicht unfizierbar.*

*(ii)* $E$ *unifizierbar* $\;\Leftrightarrow\; E \Rightarrow^*_{MM} x_1 \doteq u_1, \ldots, x_k \doteq u_k,$
*mit* $x_i$ *pw. verschieden,* $x_i \notin var(u_j), 1 \leq i, j \leq k.$

*(iii)* $E \Rightarrow^*_{MM} x_1 \doteq u_1, \ldots, x_k \doteq u_k,$
*mit* $x_i$ *pw. verschieden,* $x_i \notin var(u_j) \;\Rightarrow$
$\sigma = [u_1/x_1, \ldots, u_k/x_k]$ *ist allgemeinster Unifikator von* $E$.

# Unifikation nach Martelli/Montanari

**Satz 2.28** *$E$ unifizierbar* $\Leftrightarrow$
*es gibt allgemeinsten Unifikator $\sigma$ von $E$. Notation: $\sigma = \mathrm{mgu}(E)$*
*(„most general unifier“)*

Problem: exponentielles Anwachsen der Terme möglich

# Komplexität von Unifikation

Literatur:

- Paterson, Wegman: Linear Unification, JCSS 17, 348-375 (1978)
- Dwork, Kanellakis, Mitchell: On the sequential nature of unification, Journal Logic Prog. 1, 35-50 (1984)
- Baader, Nipkow: Term rewriting and all that. Cambridge U. Press 1998, Kap. 4.8

# Komplexität von Unifikation

**Satz 2.29** *Unifizierbarkeit ist in linearer Zeit entscheidbar. Most General Unifiers sind in linearer Zeit berechenbar. (Beweis in 1.)*

**Satz 2.30** *Unifizierbarkeit ist log-space-vollständig für P, d.h. jedes Problem in P kann mit logarithmischem Speicherverbrauch auf Unifizierbarkeit reduziert werden. (Beweis in 2.)*

$\Rightarrow$ vermutlich nicht gut parallelisierbar.

# Resolution für allgemeine Klauseln

$$\frac{C \vee A \qquad D \vee \neg B}{(C \vee D)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(A, B) \qquad \text{[Resolution]}$$

$$\frac{C \vee A \vee B}{(C \vee A)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \text{mgu}(A, B) \quad \text{[Faktorisierung]}$$

# Lifting-Lemma

**Lemma 2.31** *Falls*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & D \\ \downarrow\sigma & \downarrow\sigma \\ C\sigma & D\sigma \end{array} \\ \hline C' \end{array} \quad \textit{[aussagenlogische Resolution]}$$

*dann gibt es $\tau$, so daß*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \hline C'' \\ \downarrow\tau \\ C' = C''\tau \end{array} \quad \textit{[allgemeine Resolution]}$$

Entsprechend für Faktorisieren.

# Lifting-Lemma

**Korollar 2.32** *Sei $N$ eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.*

$$Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

# Sätze von Herbrand und Löwenheim-Skolem

**Satz 2.33** *(Herbrand) Sei $N$ eine Menge von $\Sigma$-Klauseln.*

$$N \text{ erfüllbar} \;\Leftrightarrow\; N \text{ besitzt Herbrand-Modell über } \Sigma$$

*Beweis.* "$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}
N \not\models \bot \;&\Rightarrow\; \bot \notin Res^*(N) && \text{(Res. korrekt)}\\
&\Rightarrow\; \bot \notin G_\Sigma(Res^*(N)) \\
&\Rightarrow\; I_{G_\Sigma(Res^*(N))} \models G_\Sigma(Res^*(N)) && \text{(Satz \textbf{??}; Korollar \textbf{??})}\\
&\Rightarrow\; I_{G_\Sigma(Res^*(N))} \models Res^*(N) && (I \text{ Herbrand-Mod.})\\
&\Rightarrow\; I_{G_\Sigma(Res^*(N))} \models N && (N \subseteq Res^*(N))
\end{aligned}$$

□

# Sätze von Herbrand und Löwenheim-Skolem

**Satz 2.34** *(Löwenheim-Skolem) Sei $\Sigma$ eine abzählbare Signatur und $S$ eine Menge von $\Sigma$-Satzformen (d.h. geschlossene Formeln erster Stufe). Dann ist $S$ erfüllbar, gdw. $S$ ein Modell über einem abzählbaren Universum besitzt.*

*Beweis.* Man erzeuge eine erfüllbarkeitsäquivalente Menge $N$ von Klauseln für $S$ (Skolemisierung + KNF). Wenn $\Sigma$ abzählbar, dann ist es auch $T_\Sigma$, das Universum von Herbrand-Interpretationen über $\Sigma$. Nun verwende den Satz über die Existenz von Herbrand-Modellen. $\square$

# Vollständigkeit der allgemeinen Resolution

**Satz 2.35** *Sei $N$ Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann:*

$$N \models \bot \;\Leftrightarrow\; \bot \in N$$

*Beweis.* Sei $Res(N) \subseteq N$. Wegen Korollar **??**: $Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N)$

$$\begin{aligned} N \models \bot \;&\Leftrightarrow\; G_\Sigma(N) \models \bot \qquad\quad \text{(Satz \textbf{??})} \\ &\Leftrightarrow\; \bot \in G_\Sigma(N) \text{ (aussag.log. Resol. vollständig + korrekt)} \\ &\Leftrightarrow\; \bot \in N \end{aligned}$$

$\square$

## 2.11 Geordnete Resolution mit Selektion

Motivation: Suchraum bei *Res* sehr groß. Verbesserungsidee:

1. Ordnungseinschränkungen
2. Selektion

# Ordnungseinschränkungen

In Vollständigkeitsbeweis werden nur maximale Atome resolviert bzw. faktorisiert $\Rightarrow$ Ordnungseinschränkungen

# Selektion

Eine Selektionsfunktion ist eine Abbildung

$$S : C \mapsto \text{Menge von Auftreten von negativen Literalen in } C$$

Beispiel (mit selektierten Propositionen $\boxed{X}$)

$$\boxed{\neg A} \vee \neg A \vee B$$

$$\boxed{\neg B_0} \vee \boxed{\neg B_1} \vee A$$

# Resolutionskalkül $Res_S^{\succ}$

Sei $\succ$ eine Klauselordnung und $S$ eine Selektionsfunktion. Ein Literal $L$ heißt [strikt] maximal bzgl. einer Klausel $C$ :$\Leftrightarrow$ es gibt eine Grundsubstitution $\sigma$, so daß für alle $L'$ in $C$: $L\sigma \succeq L'\sigma$ [bzw. $L\sigma \succ L'\sigma$].[a]

---

[a] Die Ordnung $\succ$ ist auf variablenfreien Ausdrücken definiert und wird auf diese Weise auf allgemeine Ausdrücke partiell erweitert.

# Resolutionskalkül $Res_S^{\succ}$

$$\frac{C \vee A \qquad \neg B \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$ [geordnete Resolution mit Selektion]

falls $\sigma = \mathrm{mgu}(A, B)$, so daß

(i) $A\sigma$ strikt maximal bzgl. $C\sigma$.

(ii) nichts selektiert in $C$ bzgl. S.

(iii) $\neg B$ selektiert oder nichts selektiert in $\neg B \vee D$ und $\neg B\sigma$ ist maximal bzgl. $D\sigma$.

# Resolutionskalkül $Res_S^{\succ}$

$$\frac{C \vee A \vee B}{(C \vee A)\sigma} \qquad \text{[geordnetes Faktorisieren]}$$

falls $\sigma = \mathrm{mgu}(A, B)$, so daß $A\sigma$ maximal bzgl. $C\sigma$ und nichts selektiert in $C$.

# Spezialfall: Aussagenlogik

Für Grundklauseln vereinfacht sich die Resolutionsregel zu

$$\frac{C \vee A \qquad D \vee \neg A}{C \vee D}$$

falls

$A \succ C$

nichts selektiert in $C$ bzgl. S.

$\neg A$ selektiert in $D \vee \neg A$ oder $\neg A \succeq \max(D)$.

($A \succ C$ ist dasselbe wie $A \succ \max(C)$.)

# Vermeidung von Rotationsredundanz

Aus

$$\dfrac{\dfrac{C_1 \vee A \quad C_2 \vee \neg A \vee B}{C_1 \vee C_2 \vee B} \qquad C_3 \vee \neg B}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}$$

wird durch Rotation

$$\dfrac{C_1 \vee A \qquad \dfrac{C_2 \vee \neg A \vee B \quad C_3 \vee \neg B}{C_2 \vee \neg A \vee C_3}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}$$

ein zweiter Beweis derselben Klausel. In großen Beweisen sind viele solcher Rotationen möglich. Ist $A \succ B$, so erfüllt der zweite Beweis die Ordnungseinschränkungen nicht.

# Vermeidung von Rotationsredundanz

Fazit: Bei Ordnungseinschränkung (egal, welches $\succ$ man wählt) sind keine Rotationen möglich, d.h. es wird aus allen “rotations-äquivalenten” Beweisen genau ein Repräsentant ausgewählt.

# Suchräume werden kleiner

Sei $A \succ B$ und $S$ wie durch $\boxed{X}$ angezeigt.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \lor B$ | |
| 2) | $A \lor \boxed{\neg B}$ | |
| 3) | $\neg A \lor B$ | |
| 4) | $\neg A \lor \boxed{\neg B}$ | |
| 5) | $B \lor B$ | 1&3 |
| 6) | $B$ | 5 |
| 7) | $\neg A$ | 6&4 |
| 8) | $A$ | 6&2 |
| 9) | $\perp$ | 8&7 |

Mit dieser Ordnung und Selektionsfunktion ist in diesem Beispiel die Beweissuche streng deterministisch.