Lifting-Lemma

Lemma 2.31 *Falls*

$$\begin{array}{cc} C & D \\ \downarrow\sigma & \downarrow\sigma \\ C\sigma & D\sigma \\ \hline \multicolumn{2}{c}{C'} \end{array} \quad \textit{[aussagenlogische Resolution]}$$

dann gibt es τ, so daß

$$\begin{array}{c} \dfrac{C \qquad D}{C''} \\ \downarrow\tau \\ C' = C''\tau \end{array} \quad \textit{[allgemeine Resolution]}$$

Entsprechend für Faktorisieren.

Lifting-Lemma

Korollar 2.32 *Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.*

$$Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

Sätze von Herbrand und Löwenheim-Skolem

Satz 2.33 *(Herbrand) Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.*

$$N \text{ erfüllbar} \;\Leftrightarrow\; N \text{ besitzt Herbrand-Modell über } \Sigma$$

Beweis. "$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}
N \not\models \bot \;&\Rightarrow\; \bot \notin \mathit{Res}^*(N) && \text{(Res. korrekt)}\\
&\Rightarrow\; \bot \notin G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N))\\
&\Rightarrow\; I_{G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N))} \models G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) && \text{(Satz 2.24; Korollar 2.37)}\\
&\Rightarrow\; I_{G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N))} \models \mathit{Res}^*(N) && (I \text{ Herbrand-Mod.})\\
&\Rightarrow\; I_{G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N))} \models N && (N \subseteq \mathit{Res}^*(N))
\end{aligned}$$

□

Sätze von Herbrand und Löwenheim-Skolem

Satz 2.34 *(Löwenheim-Skolem) Sei Σ eine abzählbare Signatur und S eine Menge von Σ-Satzformen (d.h. geschlossene Formeln erster Stufe). Dann ist S erfüllbar, gdw. S ein Modell über einem abzählbaren Universum besitzt.*

Beweis. Man erzeuge eine erfüllbarkeitsäquivalente Menge N von Klauseln für S (Skolemisierung + KNF). Wenn Σ abzählbar, dann ist es auch T_Σ, das Universum von Herbrand-Interpretationen über Σ. Nun verwende den Satz über die Existenz von Herbrand-Modellen. $\square$

Vollständigkeit der allgemeinen Resolution

Satz 2.35 *Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann:*

$$N \models \bot \;\Leftrightarrow\; \bot \in N$$

Beweis. Sei $Res(N) \subseteq N$. Wegen Korollar 2.37: $Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N)$

$$\begin{aligned} N \models \bot \;&\Leftrightarrow\; G_\Sigma(N) \models \bot \qquad \text{(Satz 2.33)} \\ &\Leftrightarrow\; \bot \in G_\Sigma(N) \text{ (aussag.log. Resol. vollständig + korrekt)} \\ &\Leftrightarrow\; \bot \in N \end{aligned}$$

□

2.11 Geordnete Resolution mit Selektion

Motivation: Suchraum bei *Res* sehr groß. Verbesserungsidee:

1. Ordnungseinschränkungen
2. Selektion

Ordnungseinschränkungen

In Vollständigkeitsbeweis werden nur maximale Atome resolviert bzw. faktorisiert $\Rightarrow$ Ordnungseinschränkungen

Selektion

Eine Selektionsfunktion ist eine Abbildung

$$S : C \mapsto \text{Menge von Auftreten von negativen Literalen in } C$$

Beispiel (mit selektierten Propositionen $\boxed{X}$)

$$\boxed{\neg A} \vee \neg A \vee B$$

$$\boxed{\neg B_0} \vee \boxed{\neg B_1} \vee A$$

Resolutionskalkül $Res_S^{\succ}$

Sei $\succ$ eine Klauselordnung und S eine Selektionsfunktion. Ein Literal L heißt [strikt] maximal bzgl. einer Klausel C $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Grundsubstitution σ, so daß für alle L' in C: $L\sigma \succeq L'\sigma$ [bzw. $L\sigma \succ L'\sigma$].[a]

[a] Die Ordnung $\succ$ ist auf variablenfreien Ausdrücken definiert und wird auf diese Weise auf allgemeine Ausdrücke partiell erweitert.

Resolutionskalkül $Res_S^{\succ}$

$$\frac{C \vee A \qquad \neg B \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$ [geordnete Resolution mit Selektion]

falls $\sigma = \text{mgu}(A, B)$, so daß

(i) $A\sigma$ strikt maximal bzgl. $C\sigma$.

(ii) nichts selektiert in C bzgl. S.

(iii) $\neg B$ selektiert oder nichts selektiert in $\neg B \vee D$ und $\neg B\sigma$ ist maximal bzgl. $D\sigma$.

Resolutionskalkül $Res_S^{\succ}$

$$\frac{C \lor A \lor B}{(C \lor A)\sigma} \qquad [\text{geordnetes Faktorisieren}]$$

falls $\sigma = \text{mgu}(A, B)$, so daß $A\sigma$ maximal bzgl. $C\sigma$ und nichts selektiert in C.

Spezialfall: Aussagenlogik

Für Grundklauseln vereinfacht sich die Resolutionsregel zu

$$\frac{C \vee A \qquad D \vee \neg A}{C \vee D}$$

falls

(i) $A \succ C$

(ii) nichts selektiert in C bzgl. S.

(iii) $\neg A$ selektiert in $D \vee \neg A$ oder $\neg A \succeq \max(D)$.

($A \succ C$ ist dasselbe wie $A \succ \max(C)$.)

Vermeidung von Rotationsredundanz

Aus

$$\dfrac{\dfrac{C_1 \vee A \qquad C_2 \vee \neg A \vee B}{C_1 \vee C_2 \vee B} \qquad C_3 \vee \neg B}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}$$

wird durch Rotation

$$\dfrac{C_1 \vee A \qquad \dfrac{C_2 \vee \neg A \vee B \qquad C_3 \vee \neg B}{C_2 \vee \neg A \vee C_3}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}$$

ein zweiter Beweis derselben Klausel. In großen Beweisen sind viele solcher Rotationen möglich. Ist $A \succ B$, so erfüllt der zweite Beweis die Ordnungseinschränkungen nicht.

Vermeidung von Rotationsredundanz

Fazit: Bei Ordnungseinschränkung (egal, welches $\succ$ man wählt) sind keine Rotationen möglich, d.h. es wird aus allen "rotations-äquivalenten" Beweisen genau ein Repräsentant ausgewählt.

Suchräume werden kleiner

Sei $A \succ B$ und S wie durch $\boxed{X}$ angezeigt.

1)	$A \vee B$	
2)	$A \vee \boxed{\neg B}$	
3)	$\neg A \vee B$	
4)	$\neg A \vee \boxed{\neg B}$	
5)	$B \vee B$	1&3
6)	B	5
7)	$\neg A$	6&4
8)	A	6&2
9)	$\perp$	8&7

Mit dieser Ordnung und Selektionsfunktion ist in diesem Beispiel die Beweissuche streng deterministisch.

Lifting-Lemma für $Res_S^{\succ}$

Lemma 2.36 *Falls*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} C & & D \\ \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ C\sigma & & D\sigma \end{array} \\ \hline C' \end{array} \quad \textit{[aussagenlogische Inferenz in } \mathrm{Res}_S^{\succ}\textit{]}$$

dann gibt es τ, so daß

$$\begin{array}{c} \dfrac{C \qquad D}{C''} \\ \big\downarrow{\scriptstyle\tau} \\ C' = C''\tau \end{array} \quad \textit{[Inferenz in } \mathrm{Res}_S^{\succ}\textit{]}$$

Entsprechend für Faktorisieren.

Lifting-Lemma

Korollar 2.37 *Sei N eine unter $\mathrm{Res}_S^{\succ}$ saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $\mathrm{Res}_S^{\succ}(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.*

$$\mathrm{Res}_S^{\succ}(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

Korrektheit und Widerspruchsvollständigkeit

Satz 2.38 *Sei $\succ$ eine Atomordnung und S eine Selektionsfunktion, so daß $Res_S^{\succ}(N) \subseteq N$:*

$$N \models \bot \;\Leftrightarrow\; \bot \in N$$

Proof: "$\Rightarrow$" trivial

"$\Leftarrow$" (i) aussagenlogische Ebene: Konstruktion von Interpretation I_N wie früher, außer daß Klauseln C in N mit selektierten Literalen nichts produzieren, auch wenn sie falsch sind in I_C und ihr maximales Atom nur positiv und nur einmal vorkommt.

(ii) Lifting unter Verwendung von Lemma **??**.

Globale Redundanz: Simplifikations- und Löschregeln

Globale Redundanz:

- viele Beweisversuche lassen sich nicht zu einem Beweis fortsetzen: Sackgassen
- ein Beweisversuch kann einen anderen subsumieren

Globale Redundanz: Simplifikations- und Löschregeln

Simplifikations- und Löschregeln:

- Tautologieelimination

$$N \cup \{C \vee A \vee \neg A\} \;\triangleright\; N$$

- Subsumption

$$N \cup \{C, D\} \;\triangleright\; N \cup \{C\}$$

  falls $C\sigma \subseteq D$ (d.h. C subsumiert D),
  aber $D\tau \neq C$, für alle τ (d.h. Subsumption ist strikt).

- Reduktion (siehe unten)

Widerspruchsvollständigkeit wird bewahrt (siehe unten).