3. Weitere Kalküle und Beweisverfahren

- Semantische Tableaux
- Hilbert Kalküle
- Gentzen Kalküle

Semantische Tableaux

analytisch: Inferenzen gemäß dem logischen Gehalt der Symbole

zielorientiert: Inferenzen arbeiten auf dem Beweisziel

global: manche Inferenzen wirken auf die gesamte Formelmenge

Literatur: Fitting-Buch, Kap. 3, 6, 7.

R.M. Smullyan: First-Order Logic, Dover Publ., New York, 1968, revidiert 1995.

Semantische Tableaux

Wie Resolution wurden s. T. in den 60er Jahren erfunden, und zwar von R.M. Smullyan,[a] auf Basis der Arbeiten von Gentzen in den 30er Jahren und von Beth in den 50er Jahren.

[a] Lt. Fitting wurden Tableaux erstmals von dem Polen Z. Lis in einer erst kürzlich wiederentdeckten Arbeit in Studia Logica 10, 1960, eingeführt.

Ein Tableau für $\{\neg P \wedge \neg(Q \vee R),\ \neg(Q \wedge \neg R)\}$

1. $\neg P \wedge \neg(Q \vee R)$

2. $\neg(Q \wedge \neg R)$

3. $\neg Q$	4. $\neg\neg R$
6. $\neg P$	5. R
7. $\neg(Q \vee R)$	
8. $\neg Q$	
9. $\neg R$	

Das Tableau ist nicht maximal, aber der erste Pfad ist es. Dieser ist nicht geschlossen, also ist die Formelmenge $\{1, 2\}$ erfüllbar. (Diese Begriffe werden später formal definiert.)

Klassifikation von Formeln

konjunktiv			disjunktiv		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$X \wedge Y$	X	Y	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \implies Y)$	X	$\neg Y$	$X \implies Y$	$\neg X$	Y
$\neg(X \leftarrow Y)$	$\neg X$	Y	$X \leftarrow Y$	X	$\neg Y$
$\neg(X \uparrow Y)$	X	Y	$X \uparrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \downarrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg(X \downarrow Y)$	X	Y

(„$\uparrow$“ ist „nand“, „$\downarrow$“ ist „nor“.)

Im folgenden werden als binäre Junktoren nur die obigen zugelassen.

(Die anderen müssen wir zuvor eliminieren.)

Aussagenlogische Expansionsregeln

Die Regeln werden an den Blättern zur Expansion des Tableau angewendet. Dort können die jeweiligen Konklusionen (untereinander bzw. nebeneinander) angefügt werden, falls die Prämisse auf eine Formel auf dem *Pfad* von der Wurzel zu diesem Blatt paßt.

Aussagenlogische Expansionsregeln

Negationselimination

$$\frac{\neg\neg F}{F} \qquad \frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top}$$

α-Expansion

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \end{array}$$

(α_1 und α_2 untereinander anfügen)

β-Expansion

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

(β_1 und β_2 nebeneinander anfügen)

Tableau: Begriffe

Ein semantisches Tableau ist ein mit Formeln markierter (ungeordneter, endlicher) Baum. Sei $\{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Menge von Formeln.

1. Der aus einem Pfad bestehende Baum[a]

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \ldots \\ F_n \end{array}$$

ist ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

[a] Meist werden die Kanten von Knoten zu Nachfolger dann nicht gezeichnet, wenn es nur einen Nachfolger gibt.

Tableau: Begriffe

2. Ist T ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$ und entsteht T' durch Anwendung einer Tableauexpansionsregel aus T, so ist auch T' ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

Ein Pfad (d.h., ein Weg von der Wurzel zu einem Blatt) in einem Tableau heißt geschlossen, falls er $\perp$ oder eine Formel F und deren Negation $\neg F$ enthält (F beliebig). Ansonsten heißt der Pfad offen.

Tableau: Begriffe (II)

Ein Tableau heißt geschlossen, falls jeder Pfad geschlossen ist.

Ein Tableaubeweis für F ist ein geschlossenes Tableau für $\{\neg F\}$.

Tableau: Begriffe (II)

Ein offener Pfad P in einem Tableau heißt maximal, wenn auf jede Formel auf P die zugehörige Expansionsregel angewendet worden ist. D.h. ist F eine Formel auf P, so enthält P auch

1. F_1 und F_2, falls F eine α-Formel,
2. F_1 oder F_2, falls F eine β-Formel, und
3. F', falls F eine Negationsformel und F' die Konklusion der zugehörigen Eliminationsregel.

Tableau: Begriffe (II)

Ein Tableau heißt maximal, falls jeder Pfad geschlossen oder maximal ist.

Ein Tableau heißt strikt, wenn auf keine Formel die zugehörige Expansionsregel auf einem Pfad mehr als einmal angewendet wird.

Ein Tableau heißt klausal, wenn jede seiner Formeln eine Klausel ist.

Ein Tableaubeweis

Man beginnt mit der Negation der zu beweisenden Formel.

1.	$\neg[(P \implies (Q \implies R)) \implies ((P \vee S) \implies ((Q \implies R) \vee S))]$	
2.	$(P \implies (Q \implies R))$	$[1_1]$
3.	$\neg((P \vee S) \implies ((Q \implies R) \vee S))$	$[1_2]$
4.	$P \vee S$	$[3_1]$
5.	$\neg((Q \implies R) \vee S))$	$[3_2]$
6.	$\neg(Q \implies R)$	$[5_1]$
7.	$\neg S$	$[5_2]$

8. $\neg P$ $[2_1]$

9. $Q \implies R$ $[2_2]$

10. P $[4_1]$

11. S $[4_2]$

Es gibt drei Pfade, alle drei sind geschlossen.

Eigenschaften aussagenlogischer Tableaux

Satz 3.1 *Sei T ein Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$.*
$\{F_1, \ldots, F_n\}$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ (irgend-)ein Pfad (d.h. die Menge seiner Formeln) in T ist erfüllbar.

(Beweis durch Induktion über den Aufbau von T.)

Korollar 3.2 *T geschlossen $\Rightarrow \{F_1, \ldots, F_n\}$ unerfüllbar*

Satz 3.3 *Sei T ein striktes Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$. Dann ist T endlich.*

Widerspruchsvollständigkeit

Satz 3.4 *Sei P ein maximaler, offener Pfad eines Tableau. Dann ist die Menge der Formeln auf P erfüllbar.*

Beweis. [für den Fall des klausalen Tableau]
Sei N die Menge der Formeln auf P. Es ist $\perp$ nicht in N. Seien $C \vee A$ und $D \vee \neg A$ zwei resolvierbare Klauseln in N. Eine der beiden Teilklauseln C oder D, sagen wir, C, ist nicht leer, weil ansonsten P geschlossen wäre. Da T maximal, ist in P die β-Regel auf $C \vee A$ angewendet worden, d.h., P (und N) enthält eine echte Teilklausel von $C \vee A$, und somit ist $C \vee A$ redundant in N. Enthält N eine faktorisiertbare Klausel $C \vee A \vee A$, so enthält N wiederum eine echte Teilklausel, also ist $C \vee A \vee A$ ebenfalls redundant in N. Mit anderen Worten, N ist unter *Res*(olution) bis auf Redundanz saturiert, so ist N erfüllbar. $\Box$

Widerspruchsvollständigkeit

Satz 3.5 *$\{F_1, \ldots, F_n\}$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt kein geschlossenes, striktes Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$.*

Beweis. Sei T ein striktes, maximales Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$. In T muß es einen offenen Pfad P geben. Wegen dem vorherigen Satz ist N, und damit wegen Satz 3.1 auch $\{F_1, \ldots, F_n\}$ erfüllbar. $\square$

Hilbert-Kalküle

- gehen auf Hilbert (um 1920) und Frege (um 1890) zurück
- rein synthetische Mechanismen des Vorwärtsschließens

Axiomenschema K

$$F \implies (G \implies F)$$

Axiomenschema S

$$(F \implies G \implies H) \implies (F \implies G) \implies (F \implies H)$$

Modus Ponens

$$\frac{F \quad F \implies G}{G}$$

Hier werden gültige Formeln direkt hergeleitet. Wir betrachten nur den aussagenlogischen Fall. (Zur Erinnerung: „ $\Longrightarrow$ “ ist rechtsassoziativ.) Dies ist ein Hilbert-Kalkül H_{min} für minimale Logik (hier gibt es nur Aussagenvariablen und „ $\Longrightarrow$ “). Axiomenschemata sind Inferenzregeln ohne Prämissen, d.h. man schreibt nur die Konklusion hin.

Deduktionstheorem

Satz 3.6 (Deduktionstheorem) *Sind F, G Formeln und ist N eine Menge von Formeln, so gilt:*

$$N \cup \{F \vdash_{H_{min}}\} G \Leftrightarrow N \vdash_{H_{min}} F \Longrightarrow G$$

Hilbert-Kalküle werden nur dann praktikabel, wenn man auf der Metaebene das Deduktionstheorem verwendet, beide Richtungen sind konstruktiv. Die Formalisierung dieser Methode führt zu dem Kalkül des natürlichen Schließens.

Erweiterung für weitere Junktoren

Mit der Klassifikation in α- und β-Formeln, wird eine mögliche Erweiterung von H_{min} zu einem Kalkül H für die gesamte Aussagenlogik wie folgt definiert:

$$\bot \implies F$$

$$F \implies \top$$

$$\neg\neg F \implies F$$

$$F \implies (\neg F \implies G)$$

$$\alpha \implies \alpha_1$$

$$\alpha \implies \alpha_2$$

$$(\beta_1 \implies F) \implies (\beta_2 \implies F) \implies (\beta \implies F)$$

Satz 3.7 *Der obige Hilbert-Kalkül H ist korrekt und vollständig, d.h. für jede Formel F und Menge N von Formeln gilt:*

$$N \models F \;\Leftrightarrow\; N \vdash_H F$$

Es ist klar, daß sich das Deduktionstheorem nicht ändert, solange man nur weitere Axiomenschemata, aber keine weiteren Regeln hinzufügt.

NB: H_{min} ist nicht vollständig hinsichtlich der gültigen Implikationsformeln der Aussagenlogik.

Der Gentzenkalkül LK

Erfinder: G. Gentzen, um 1935

Datenstruktur: Sequenzen, ($\rightarrow$ „Sequenzenkalkül") das sind Paare von Multimengen[a] von Formeln erster Stufe (mit $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$ als binären Junktoren), geschrieben

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \rhd G_1, G_2, \ldots, G_m$$

mit $n, m \geq 0$.

[a] Hier gibt es Unterschiede. Wir bauen Kommutativität in die Notation ein und behandeln Idempotenz explizit. Man verwendet Mengen, wenn beides implizit bleibt. Man verwendet Folgen, wenn man weder Idempotenz noch Kommutativität implizit lassen will. Dann braucht man zusätzlich zur Abschwächungs- und Kontraktionsregel noch weitere strukturelle Regeln für Permutation.

Der Gentzenkalkül LK

Semantik: Komma links ist Konjunktion, Komma rechts Disjunktion, $\triangleright$ ist Implikation

Anwendungsrichtung: rückwärts (analytisch) von Konklusion zu Prämisse(n)

Eigenschaften: perfekte Symmetrie zwischen links und rechts; Subformeleigenschaft; Verwandtschaft mit semantischen Tableaux

Gentzenkalkül: Regeln (I)

Axiome

$$F \rhd F \qquad \bot \rhd \qquad \rhd \top$$

Abschwächung

$$\frac{\Gamma \rhd \Delta}{\Gamma, F \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta}{\Gamma \rhd \Delta, F}$$

Kontraktion

$$\frac{\Gamma, F, F \rhd \Delta}{\Gamma, F \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta, F, F}{\Gamma \rhd \Delta, F}$$

Negation

$$\frac{\Gamma \rhd \Delta, F}{\Gamma, \neg F \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma, F \rhd \Delta}{\Gamma \rhd \Delta, \neg F}$$

Konjunktion

$$\frac{\Gamma, F, G \rhd \Delta}{\Gamma, F \wedge G \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta, F \quad \Gamma \rhd \Delta, G}{\Gamma \rhd \Delta, F \wedge G}$$

Gentzenkalkül: Regeln (II)

Disjunktion

$$\frac{\Gamma, F \rhd \Delta \quad \Gamma, G \rhd \Delta}{\Gamma, F \vee G \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta, F, G}{\Gamma \rhd \Delta, F \vee G}$$

Implikation

$$\frac{\Gamma \rhd \Delta, F \quad \Gamma, G \rhd \Delta}{\Gamma, F \implies G \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma, F \rhd \Delta, G}{\Gamma \rhd \Delta, F \implies G}$$

Allquantor

$$\frac{\Gamma, F[t/x] \rhd \Delta}{\Gamma, \forall x F \rhd \Delta} \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta, F}{\Gamma \rhd \Delta, \forall x F} \; (*)$$

Existenzquantor

$$\frac{\Gamma, F \rhd \Delta}{\Gamma, \exists x F \rhd \Delta} \; (*) \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta, F[t/x]}{\Gamma \rhd \Delta, \exists x F}$$

mit Nebenbedingung „x nicht frei in Γ, Δ“ bei (*****).

Gentzenkalkül: Schnittregel

Schnittregel S

$$\frac{\Gamma \rhd F, \Delta \quad \Gamma, F \rhd \Delta}{\Gamma \rhd \Delta}$$

Gentzenkalkül: Eigenschaften

Satz 3.8 *(Korrektheit und Vollständigkeit)*

$$\models F \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathsf{LK}} F$$

Die Schnittregel S ist häßlich, weil bei Rückwärtsanwendung die Schnittformel F beliebig sein darf und nichts mit der zu beweisenden Formel zu tun haben muß. Glücklicherweise braucht man die Regel nicht:

Gentzenkalkül: Eigenschaften

Satz 3.9 *(Schnittelimination) Sei* $\mathsf{LK}' = \mathsf{LK} \setminus \{\mathsf{S}\}$.

$$\vdash_{\mathsf{LK}'} F \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathsf{LK}} F$$

Beweis. Durch Transformation von Beweisen mit Schnitt in solche ohne. $\square$

Konsequenz ist die Subformeleigenschaft des Kalküls: alle Formeln eines Beweises sind (modulo Substitution für gebundene Variablen) Subformeln des Beweisziels. Im aussagenlogischen Fall ergibt sich also ein Entscheidungsverfahren. Eine weitere Konsequenz ist die Konsistenz des Kalküls: die leere Sequenz $\triangleright$, die semantisch falsum repräsentiert, ist nicht ableitbar, und zu dieser Einsicht bedarf es keiner semantischen Argumentation.

Gentzenkalkül: Eigenschaften (II)

Satz 3.10 *(Die Schnittregel ist zulässig)*

$$\Gamma \rhd F, \Delta,\ \Gamma, F \rhd \Delta \ \vdash_{\mathsf{LK}}\ \Gamma \rhd \Delta$$

Die Schnittregel kann nicht eliminiert werden, wenn man zu LK weitere nichtlogische Axiome hinzunimmt oder wenn man Beweise mit Annahmen betrachtet:

Satz 3.11

$$F_1, \ldots, F_k \vdash_{\mathsf{LK}} F \ \not\Rightarrow\ F_1, \ldots, F_k \vdash_{\mathsf{LK}'} F$$

Weitere Kalküle und Beweisverfahren

Instantiierungs-basierte Verfahren Benutze effizienter Erfüllbarkeitstest für Aussagenlogik

- Partielle Instantiierung
- Disconnektions kalkül

Natürliches Schließen Formalisierung der Ideen, die hinter der Verwendung des Deduktionstheorems steht.

Logik erster Stufe mit Gleichheit

- Knuth-Bendix vervollständigung
- Termersetzungssystems
- Superposition