Teil 2: Prädikatenlogik 1. Stufe

2.1 Syntax

2.2 Semantics

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

Die Menge der Wahrheitswerte sei $\{0, 1\}$.

$\mathcal{A}(\beta)$: Σ-Formeln $\longrightarrow \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(\bot) &= 0\\
\mathcal{A}(\beta)(\top) &= 1\\
\mathcal{A}(\beta)(p(s_1,\ldots,s_n)) &= 1 \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{A}(\beta)(s_1),\ldots,\mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_A\\
\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) &= 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t)\\
\mathcal{A}(\beta)(\neg F) &= 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(\beta)(F) = 0\\
\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) &= \mathrm{B}_\rho(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))\\
&\quad \text{mit } \mathrm{B}_\rho \text{ die } \rho \text{ zugeordnete Boolesche Funktion}\\
\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) &= \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \to a])(F)\}\\
\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) &= \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \to a])(F)\}
\end{aligned}
$$

Standardinterpretation $\mathbb{N}$ für Peano-Arithmetik

$U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$0_{\mathbb{N}} = 0$

$s_{\mathbb{N}} : n \mapsto n + 1$

$+_{\mathbb{N}} : (n, m) \mapsto n + m$

$*_{\mathbb{N}} : (n, m) \mapsto n * m$

$\leq_{\mathbb{N}} = \{(n, m) \mid n \text{ kleiner-gleich } m\}$

$<_{\mathbb{N}} = \{(n, m) \mid n \text{ kleiner als } m\}$

Standardinterpretation $\mathbb{N}$ für Peano-Arithmetik

Mit $\beta : x \mapsto 1, y \mapsto 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) & = & 3 \\ \mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) & = & 1 \\ \mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) & = & 1 \\ \mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) & = & 0 \\ \mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) & = & 1 \end{array}$$

($\mathbb{N}$ ist nur eine von vielen Σ_{PA}-Interpretationen.)

2.3 Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

F gilt in A unter β:

$$A, \beta \models F \;:\Leftrightarrow\; A(\beta)(F) = 1$$

F gilt in A (A ist Modell von F):

$$A \models F \;:\Leftrightarrow\; A, \beta \models F, \text{ für alle } \beta \in X \to U_A$$

F ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \;:\Leftrightarrow\; A \models F, \text{ für alle } A \in \Sigma\text{-Alg}$$

F heißt erfüllbar gdw. es A und β gibt, so daß $A, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Substitutionslemma

Satz 2.1 *Für alle Σ-Algebren A, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:*

$$A, \beta \models F[t/x] \quad \Leftrightarrow \quad A, \beta[x \to A(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Übung.

Allgemeiner gilt für beliebige Substitutionen σ:

Satz 2.2

$$A, \beta \models F\sigma \quad \Leftrightarrow \quad A, \beta \circ \sigma \models F,$$

wobei $\beta \circ \sigma : X \to A$ die Wertebelegung mit $\beta \circ \sigma(x) = A(\beta)(x\sigma)$, für alle Variablen x.

Folgerung und Äquivalenz

F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$

$:\Leftrightarrow$ für alle $A \in \Sigma$-Alg und $\beta \in X \to U_A$ gilt:

$$A, \beta \models F \;\Rightarrow\; A, \beta \models G$$

F und G sind äquivalent

$:\Leftrightarrow$ für alle $A \in \Sigma$-Alg und $\beta \in X \to U_A$ gilt:

$$A, \beta \models F \;\Leftrightarrow\; A, \beta \models G$$

Folgerung und Äquivalenz

Proposition 2.3 *F impliziert G gdw. $(F \implies G)$ ist gültig*

Proposition 2.4 *F und G sind äquivalent gdw. $(F \equiv G)$ ist gültig.*

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G \quad :\Leftrightarrow \quad$ für alle $A \in \Sigma$-Alg und $\beta \in X \to U_A$:
falls $A, \beta \models F$, für alle $F \in N$, so $A, \beta \models G$.

Folgerung und Äquivalenz

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch (Un-)Erfüllbarkeitstest:

Proposition 2.5

$$F \textit{ gültig} \;\Leftrightarrow\; \neg F \textit{ unerfüllbar}$$

Theorie einer Struktur

Sei $A \in \Sigma$-Alg. Die Theorie von A ist:

$$Th(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \ \Sigma\text{-Formel} \ \mid A \models F\}$$

Analog für Mengen von Strukturen.

Zwei interessante Theorien

1. Presburger Arithmetik

Sei $\Sigma_{Pres} = (\{0/0, s/1, +/2\},\ \emptyset)$ und $A = (\mathbb{Z}, 0, s, +)$ die zugehörige Standardinterpretation auf den ganzen Zahlen.[a]

$Th(A)$ heißt Presburger Arithmetik (M. Presburger (1929))

[a] Es ergibt sich kein wesentlicher Unterschied, wenn man anstatt $\mathbb{Z}$ die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachtet. Man kann auch s gegen $\geq$ austauschen. Gibt man $\geq$ vor, kann man auf Gleichheit in der Logik verzichten.

Zwei interessante Theorien

1. Presburger Arithmetic

Presburger Arithmetik ist entscheidbar

- in 3EXPTIME[a]

  (und es gibt $c \geq 0$, so daß $Th(A) \notin \mathrm{NTIME}(2^{2^{cn}})$), und

- in 2EXPSPACE; automatentheoretische Methoden anwendbar.

[a] D. Oppen: A $2^{2^{2^n}}$ upper bound on the complexity of Presburger arithmetic. Journal of Computer and System Sciences, 16(3):323–332, July 1978

Zwei interessante Theorien

2. Peano Arithmetic

Dagegen liefert $A' = (\mathbb{N}, 0, s, +, *)$, die Standardinterpretation von

$$\Sigma_{PA} = (\{0/0, s/1, +/2, */2\}, \emptyset),$$

als Theorie $Th(A')$ die Peano-Arithmetik (unentscheidbar, nicht einmal rekursiv aufzählbar).

Merke: Die Signatur kann einen großen Unterschied hinsichtlich Expressivität machen.

2.4 Algorithmische Probleme

Algorithmische Probleme

Gültigkeit(F):

$\models F$? (Σ fest)

Erfüllbarkeit(F):

F erfüllbar? (Σ fest)

Modelltest(F,A):

$A \models F$? (Σ fest)

Theorietest(F):

$F \in Th(A)$? (Σ, $A \in \Sigma$-Alg fest)

Beschränkung auf Teilklassen von Signaturen und Formeln:

Fragmente von Prädikatenlogik

Gödelsche Sätze

1. Es gibt Σ, so daß Gültigkeit(F) unentscheidbar.
2. Für jedes Σ ist $\{F\ \Sigma\text{-Formel} \mid\ \models F\}$ rekursiv aufzählbar.
3. Für $\Sigma = \Sigma_{PA}$ und $A = (\mathbb{N}, 0, s, +, *)$ ist $Th(A)$ nicht rekursiv aufzählbar.

$\Rightarrow$ Studium von Teilklassen von Formeln (Fragmenten) oder Strukturen.