2.5 Normalformen, Skolemisierung, Herbrandmodelle

Vorteile von Normalformen

Reduktion der logischen Konzepte

einfache Datenstrukturen für Beweisverfahren

Pränexe Normalform

Pränexe Formeln sind von der Form

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \; F,$$

wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$ der Quantorenpräfix und F die Matrix der Formel.

Pränexe Normalform

Herstellung von pränexer Normalform durch $\Rightarrow_P$:

$$
\begin{aligned}
(F \equiv G) \quad &\Rightarrow_P \quad (F \implies G) \wedge (G \implies F) \\
\neg QxF \quad &\Rightarrow_P \quad \overline{Q}x\neg F \\
(QxF \;\rho\; G) \quad &\Rightarrow_P \quad Qy(F[y/x] \;\rho\; G),\; y \text{ neu},\; \rho \in \{\wedge, \vee\} \\
(QxF \implies G) \quad &\Rightarrow_P \quad \overline{Q}y(F[y/x] \implies G),\; y \text{ neu} \\
(F \;\rho\; QxG) \quad &\Rightarrow_P \quad Qy(F \;\rho\; G[y/x]),\; y \text{ neu},\; \rho \in \{\wedge, \vee, \implies\}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $\overline{Q}$ der zu Q duale Quantor, d.h. $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$.

Skolemisierung

Transformation $\Rightarrow_S$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y F \quad \Rightarrow_S \quad \forall x_1, \ldots, x_n F[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$$

wobei f/n eine neues Funktionssymbol (Skolemfunktion).

Optimierung: Existenzquantoren nicht pränex machen
$\Rightarrow$ Skolemfunktionen von weniger Variablen abhängig

Pränexe Normalform und Skolemisierung

Zusammen:

$$F \overset{*}{\Rightarrow}_P \underbrace{G}_{\text{pränexe Form}} \overset{*}{\Rightarrow}_S \underbrace{H}_{\text{pränex, kein } \exists}$$

Satz 2.6 *Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:*

1. *F und G sind äquivalent.*
2. *G erfüllbar $\Leftrightarrow$ H erfüllbar*

   (bzgl. Σ-Alg) (bzgl. Σ'-Alg)
   wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.
3. *G und H (als Σ'-Formeln) sind im Allgemeinen nicht äquivalent.*

Klauselnormalform (konjunktive Normalform)

Transformationsregeln $\Rightarrow_K$

$$
\begin{aligned}
(F \equiv G) &\Rightarrow_K (F \implies G) \wedge (G \implies F) \\
(F \implies G) &\Rightarrow_K (\neg F \vee G) \\
\neg(F \vee G) &\Rightarrow_K (\neg F \wedge \neg G) \\
\neg(F \wedge G) &\Rightarrow_K (\neg F \vee \neg G) \\
\neg\neg F &\Rightarrow_K F \\
(F \wedge G) \vee H &\Rightarrow_K (F \vee H) \wedge (G \vee H)
\end{aligned}
$$

Klauselnormalform (konjunktive Normalform)

Transformationsregeln $\Rightarrow_K$ (continued):

$$
\begin{array}{lcl}
(F \wedge \top) & \Rightarrow_K & F \\
(F \wedge \bot) & \Rightarrow_K & \bot \\
(F \vee \top) & \Rightarrow_K & \top \\
(F \vee \bot) & \Rightarrow_K & F
\end{array}
$$

Die Regeln sind modulo der Assoziativität und Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$ anzuwenden.

Die ersten 5 Regeln, zusammen mit Regel $(\neg Q)$, stellen die Negationsnormalform (NNF) her.

Gesamtbild

$$F \quad \overset{*}{\Rightarrow}_P \quad Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \; G \qquad (G \text{ quantorenfrei})$$

$$\overset{*}{\Rightarrow}_S \quad \forall x_1, \ldots, x_m \; H \qquad (m \geq n,\; H \text{ quantorenfrei})$$

$$\overset{*}{\Rightarrow}_K \quad \underbrace{\underbrace{\forall x_1, \ldots, x_n}_{\text{weglassen}} \; \bigwedge_{i=1}^{k} \; \underbrace{\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij}}_{\text{Klauseln } C_i}}_{F'}$$

$N = \{C_1, \ldots, C_k\}$ heißt Klausel(normal)form (KNF) von F.

Merke: Die Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert.

Gesamtbild

Satz 2.7 *$F' \models F$. Die Umkehrung gilt i.allg. nicht (Übung)!*

Satz 2.8 *F ist erfüllbar, gdw. F' erfüllbar, gdw. N erfüllbar.*

Viel Optimierungspotential vorhanden, wenn nur Erfüllbarkeit bewahrt werden muß und kann: Größenexplosion, kleine Stelligkeit von Skolemfunktionen.

Herbrand-Interpretationen

Ab jetzt betrachten wir, falls nichts Anderes angegeben, immer nur PL ohne Gleichheit. Ω enthalte immer mindestens ein Konstantensymbol.

Herbrand-Interpretationen (über Σ) sind Σ-Algebren A mit:

1. $U_A = T_\Sigma (=$ Menge der Grundterme über $\Sigma)$
2. $f_A : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto f(s_1, \ldots, s_n),\ f/n \in \Omega$

d.h. vorgegeben sind Terme als Daten und Funktionen als Termkonstruktoren.

Variabel sind nur die Interpretationen der Prädikatensymbole

$$P_A \subseteq T_\Sigma^m,\ p_m \in \Pi$$

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Proposition 2.9 *Jede Menge von Grundatomen I identifiziert genau eine Herbrand-Interpretation A durch*

$$(s_1, \ldots, s_n) \in p_A \;:\Leftrightarrow\; p(s_1, \ldots, s_n) \in I$$

Im folgenden werden wir daher nicht zwischen Herbrand-Interpretationen (über Σ) und Mengen von Σ-Grundatomen unterscheiden.