Herbrand-Interpretationen

Ab jetzt betrachten wir, falls nichts Anderes angegeben, immer nur PL ohne Gleichheit. Ω enthalte immer mindestens ein Konstantensymbol.

Herbrand-Interpretationen (über Σ) sind Σ-Algebren A mit:

1. $U_A = T_\Sigma (=$ Menge der Grundterme über $\Sigma)$
2. $f_A : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto f(s_1, \ldots, s_n),\ f/n \in \Omega$

d.h. vorgegeben sind Terme als Daten und Funktionen als Termkonstruktoren.

Variabel sind nur die Interpretationen der Prädikatensymbole

$$P_A \subseteq T_\Sigma^m,\ p_m \in \Pi$$

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Proposition 2.9 *Jede Menge von Grundatomen I identifiziert genau eine Herbrand-Interpretation A durch*

$$(s_1, \dots, s_n) \in p_A \ :\Leftrightarrow \ p(s_1, \dots, s_n) \in I$$

Im folgenden werden wir daher nicht zwischen Herbrand-Interpretationen (über Σ) und Mengen von Σ-Grundatomen unterscheiden.

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Beispiel:

$\Sigma_{Pres} = (\{0/0, s/1, +/2\},\ \{< /2, \leq /2\})$

$\mathbb{N}$ als Herbrand-Interpretation über Σ_{Pres}

$$
\begin{aligned}
I = \{ \quad & 0 \leq 0,\ 0 \leq s(0),\ 0 \leq s(s(0)),\ \ldots, \\
& 0 + 0 \leq 0,\ 0 + 0 \leq s(0),\ \ldots, \\
& \ldots,\ (s(0) + 0) + s(0) \leq s(0) + (s(0) + s(0)) \\
& \ldots \\
& s(0) + 0 < s(0) + 0 + 0 + s(0) \\
& \ldots\}
\end{aligned}
$$

Existenz von Herbrand-Modellen

Eine Herbrand-Interpretation I heißt Herbrand-Modell von F, falls $I \models F$.

Satz 2.10 (Herbrand) *Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.*

$$\begin{array}{lcl} N \text{ erfüllbar} & \Leftrightarrow & N \text{ hat Herbrand-Modell (über } \Sigma) \\ & \Leftrightarrow & G_\Sigma(N) \text{ hat Herbrand-Modell (über } \Sigma) \end{array}$$

wobei

$$G_\Sigma(N) = \{C\sigma \text{ Grundklausel} \mid C \in N,\ \sigma : X \to T_\Sigma\}$$

die Menge der Grundinstanzen von N ist.

[Beweis später im Zusammenhang mit dem Vollständigkeitsbeweis für Resolution.]

Beispiel für G_Σ

Bzgl. Σ_{Pres} erhält man für

$$C = (x < y) \vee (y \leq s(x))$$

folgende Grundinstanzen:

$(0 < 0) \vee (0 \leq s(0))$

$(s(0) < 0) \vee (0 \leq s(s(0)))$

$\ldots$

$(s(0) + s(0) < s(0) + 0) \vee (s(0) + 0 \leq s(s(0) + s(0)))$

$\ldots$

2.6 Widerspruchsbeweisen

Methode:

$$
\begin{aligned}
\models F \quad &\Leftrightarrow \quad \neg F \text{ unerfüllbar} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{KNF}(\neg F) \text{ unerfüllbar}
\end{aligned}
$$

Inferenzsysteme, Beweise

Inferenzsysteme Γ (Kalküle) sind Mengen von Tupeln

$$(F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}), \;\; n \geq 0,$$

genannt Inferenzen bzw. Inferenzregeln, geschrieben

$$\frac{\overbrace{F_1 \;\; \ldots \;\; F_n}^{\text{Prämissen}}}{\underbrace{F_{n+1}}_{\text{Konklusion}}} \; .$$

Klausales Inferenzsystem: Prämissen und Konklusionen sind Klauseln. Oft werden auch Inferenzsysteme über anderen Datenstrukturen betrachten (z.B. über Sequenzen).

Inferenzsysteme, Beweise

Ein Beweis in Γ einer Formel F aus einer Formelmenge N ist eine Folge $F_0, \ldots, F_k$ von Formeln, so daß

$F_k = F$,

für alle $0 \leq i \leq k$: $F_i \in N$ oder es gibt eine Inferenz $\frac{F_{i_1} \ \ldots \ F_{i_{n_i}}}{F_i}$ in Γ, so daß $0 \leq i_j < i$. N heißt die Menge der Annahmen.

Korrektheit, Vollständigkeit

Beweisbarkeit $\vdash_\Gamma$ von F aus N in Γ:

$N \vdash_\Gamma F \ :\Leftrightarrow$ es gibt einen Beweis in Γ von F aus N.

Γ heißt korrekt $:\Leftrightarrow$

$$\frac{F_1 \ \ldots \ F_n}{F} \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F_1, \ldots, F_n \models F$$

Γ heißt vollständig $:\Leftrightarrow$

$$N \models F \quad \Rightarrow \quad N \vdash_\Gamma F$$

Γ heißt widerspruchsvollständig $:\Leftrightarrow$

$$N \models \bot \quad \Rightarrow \quad N \vdash_\Gamma \bot$$

Beweise als Bäume

Marken	$\hat{=}$	Formeln		
Blätter	$\hat{=}$	Annahmen und Axiome		
andere Knoten	$\hat{=}$	Inferenzen: Konklusion	$\hat{=}$	Vater
		Prämissen	$\hat{=}$	Söhne

$$\dfrac{P(g(a,b)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P(f(a)) \lor Q(b) \qquad \dfrac{\dfrac{P(f(a)) \lor Q(b) \quad \neg P(f(a)) \lor \neg P(f(a)) \lor Q(b)}{\neg P(f(a)) \lor Q(b) \lor Q(b)}}{\neg P(f(a)) \lor Q(b)}}{Q(b) \lor Q(b)}}{Q(b)} \qquad \neg P(f(a)) \lor \neg Q(b)}{\neg P(g(a,b))}}{\bot}$$

Beweise als Bäume

Proposition 2.11 1. *Sei* Γ *korrekt. Dann* $N \vdash_\Gamma F \;\Rightarrow\; N \models F$

2. $N \vdash_\Gamma F \;\Rightarrow\;$ *es gibt* $F_1, \ldots, F_n \in N$: $F_1, \ldots, F_n \vdash_\Gamma F$.
   (Erinnert an Kompaktheit.)

2.7 Aussagenlogische Resolution

Aussagenlogische Klauseln entsprechen Grundklauseln und umgekehrt.

„$\vee$“ wird in Klauseln als assoziativ und kommutativ aufgefaßt.

Resolutionskalkül *Res*

Resolutionsregel:
$$\frac{C \vee A \qquad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

$C \vee D$: Resolvent $\quad$ A: resolviertes Atom

(positives) Faktorisieren:
$$\frac{C \vee A \vee A}{C \vee A}$$

Diese sind schematische Inferenzregeln; für jede Substitution der Schemavariablen C, D bzw. A durch Grundklauseln bzw. Grundatome ergibt sich eine Inferenz.

Beispielrefutation

1.	$\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
2.	$P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
3.	$\neg P(g(b,a)) \vee \neg Q(b)$	(gegeben)
4.	$P(g(b,a))$	(gegeben)
5.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(Fakt. 5.)
7.	$Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 6.)
8.	$Q(b)$	(Fakt. 7.)
9.	$\neg P(g(b,a))$	(Res. 8. in 3.)
10.	$\perp$	(Res. 4. in 9.)

Resolution mit implizitem Faktorisieren *RIF*

$$\frac{C \vee A \vee \ldots \vee A \qquad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

1.	$\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
2.	$P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
3.	$\neg P(g(b,a)) \vee \neg Q(b)$	(gegeben)
4.	$P(g(b,a))$	(gegeben)
5.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 1.)
6.	$Q(b) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 5.)
7.	$\neg P(g(b,a))$	(Res. 6. in 3.)
8.	$\perp$	(Res. 4. in 7.)

Korrektheit von Resolution

Satz 2.12 *Aussagenlogische Resolution ist korrekt.*

Beweis: Sei $I \in \Sigma$-Alg. Zu zeigen:

(i) für Resolution: $I \models C \vee A,\ I \models D \vee \neg A \ \Rightarrow\ I \models C \vee D$

(ii) für Faktorisieren: $I \models C \vee A \vee A \ \Rightarrow\ I \models C \vee A$

ad (i): in I gilt (a) A oder es gilt (b) $\neg A$.
(a) $I \models A \ \Rightarrow\ I \models D \ \Rightarrow\ I \models C \vee D$
(b) $I \models \neg A \ \Rightarrow\ I \models C \ \Rightarrow\ I \models C \vee D$

ad (ii): noch einfacher.

Korrektheit von Resolution

NB: In Aussagenlogik (Grundklauseln) gilt:

- $I \models L_1 \vee \ldots \vee L_n \quad \Leftrightarrow \quad$ es existiert i: $I \models L_i$.
- $I \models A$ oder $I \models \neg A$.