Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilung

Definition: Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Bezeichnung: $x \sim y$, $x \sim_R y$

Definition: Sei A eine nicht leere Menge. Eine Zerlegung (oder Partition, oder Klasseneinteilung) von A ist eine Mengenfamilie $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$ mit:

(1) $A = \bigcup \mathcal{Z}$

(2) $\emptyset \notin \mathcal{Z}$

(3) gilt $M_1, M_2 \in \mathcal{Z}$ und $M_1 \neq M_2$, so folgt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Die Elementen der Zerlegung heißen Äquivalenzklassen.

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilung

Satz: Sei A eine nichtleere Menge.
Jede Äquivalenzrelation $\sim$ über A definiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von A, und umgekehrt, jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von A bestimmt eine Äquivalenzrelation über A.

Beweis: $\sim$ Äquivalenzrelation $\mapsto$ $\mathcal{Z} = \{A_a \mid a \in A\}$ Zerlegung

$$A_a = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

$\mathcal{Z}$ Zerlegung $\mapsto$ $\sim$ Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ gdw. } \exists M \in Z\colon x, y \in M.$$

Bezeichnung: $[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$ Äquivalenzklasse von a

$A/{\sim} = \{[a] \mid a \in A\}$ Quotientenmenge (Faktormenge)

Rechnen mit Äquivalenzrelationen

Satz: Sind R und S Äquivalenzrelationen über A, so ist auch $R \cap S$ eine Äquivalenzrelation über A.

Satz: Seien R und S Äquivalenzrelationen über A.
$R \circ S$ ist eine Äquivalenzrelation über A genau dann, wenn $R \circ S = S \circ R$.

Satz: Seien R und S Äquivalenzrelationen über A bzw. B.
Dann ist auch $R \otimes S$ ist eine Äquivalenzrelation über $A \times B$.

Rechnen mit Äquivalenzrelationen

R Relation über A, wobei $A \neq \emptyset$.

$A \times A$ die größte Äquivalenzrelation, die R umfaßt.

Satz: Die nachfolgend definierte Relation R' ist eine Äquivalenzrelation.

$$\begin{aligned} R' = \{(x,y) \mid \quad & \exists n \in \mathbb{N} : \exists x_1, \ldots, x_n \in A : \\ & x = x_1 \wedge y = x_n \wedge (x_i = x_{i+1} \vee x_i R x_{i+1} \vee x_{i+1} R x_i)\} \end{aligned}$$

R' ist die kleinste Äquivalenzrelation, die R umfaßt

(die durch R über A induzierte Äquivalenzrelation).

Halbordnungsrelationen

Definition

Eine binäre Relation R über A heißt Halbordnungsrelation, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Bezeichnung: $x \leq y$

Sei $\leq$ Halbordnungsrelation über A.

Zwei Elemente $a, b \in A$ heißen vergleichbar bezüglich $\leq$, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

Halbordnungsrelationen

Definition

Eine Halbordnungsrelation $\leq$ über A heißt Ordnungsrelation, falls für zwei beliebige $x, y \in A$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Halbordnungsrelationen

Bezeichnung: $x < y \stackrel{\text{def}}{=} (x \leq y) \wedge (x \neq y)$

Definition

Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

$b \in A$ heißt unmittelbarer Nachfolger von $a \in A$, falls $a < b$ und keinen $c \in A$ existiert, mit $a < c$ und $c < b$.

(a unmittelbarer Vorgänger von b)

Halbordnungsrelationen

Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge von A.

Definition

- Ein Element $m \in M$ heißt maximales Element in M, wenn für alle $m' \in M$, aus $m \leq m'$ folgt $m = m'$.
- Ein Element $a \in A$ heißt obere Schranke von M, wenn für alle $m \in M$, $a \geq m$.
- Eine minimale obere Schranke von M heißt Supremum von M.
- Gilt $a \in M$ für das Supremum a von M in A, dann wird a Maximum von M genannt.

Halbordnungsrelationen

Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge von A.

Definition

- Ein Element $m \in M$ heißt minimales Element in M, wenn für alle $m' \in M$, aus $m' \leq m$ folgt $m = m'$.
- Ein Element $a \in A$ heißt untere Schranke von M, wenn für alle $m \in M$, $a \leq m$.
- Eine maximale untere Schranke von M heißt Infimum von M.
- Gilt $a \in M$ für das Infimum a von M in A, dann wird a Minimum von M genannt.

Halbordnungsrelationen

Definition Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

$K \subseteq A$ heißt eine Kette in A bzgl. $\leq$ falls die auf K induzierte Halbordnung $\leq_K$ eine Ordnung ist.

K heißt maximale Kette in A, falls es keine umfassende Kette in A bzgl. $\leq$ gibt.

Maximalkettenprinzip

(1) In jeder halbgordneter Menge gibt es bzgl. Mengeninklusion maximale Ketten.

(2) In jeder halbgordneter Menge gibt es zu jeder Kette K eine K umfassende, bzgl. $\leq$ maximale Kette.

Halbordnungsrelationen

Definition Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

Die Halbordnung is wohlfundiert falls für Ketten

$$x_1 \geq x_2 \geq x_2 \geq \ldots \cdots \geq x_n \geq \ldots$$

endlich sind, d.h. ein m existiert so dass $x_m = x_k$ für alle $k \geq m$.

Abbildungen und Funktionen

Definition Sei $f \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen A und B.

(1) F heißt linksvollständig, falls es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ gibt, so dass aFb.

(2) F heißt rechtseindeutig, falls für alle Paare $(a, b), (a, b') \in A \times B$ mit aFb und aFb' gilt $b = b'$.

Abbildungen und Funktionen

Definition Sei $f \subseteq A \times B$ eine linksvollständig und rechtseindeutige Relation. Dann heißt das Tripel $f = (A, B, F)$ Abbildung von A nach B.

F heißt Graph von f.

A Definitionsbereich von f; B Wertenbereich von f.

Bezeichnung: $f : A \to B$.

- $a \in A$: das eindeutig bestimmte Element $b \in B$ mit aFb wird mit $f(a)$ bezeichnet.
- $f(a)$ Bild von a; a Urbild von $f(a)$.
- $f : a \mapsto b$

Abbildungen und Funktionen

Definition

Sei $f = (A, B, F)$ eine Abbildung. Seien $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$.

Bild von M:

$$f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B \mid \exists a : (a \in A \quad \wedge \quad b = f(a))\}$$

Urbild von N:

$$f^{-1}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in N\}$$

$f(A)$ Wertenbereich von f

$f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\{b\})$

Abbildungen und Funktionen

Satz Seien $M_1, M_2 \subseteq A$ und $N_1, N_2 \subseteq B$.
Für jede Abbildung $f : A \longrightarrow B$ gilt:

(1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

(2) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$

(3) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

(4) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$

Abbildungen und Funktionen

Definition: Sei $f = (A, B, F)$ eine Abbildung. Sei $M \subseteq A$.

Die Abbildung $g = (M, B, F \cap (M \times B))$ heißt die Einschränkung von f auf M.

Bezeichnung: $f_{|M}$

Definition: Seien $f = (A, B, F)$, $g = (B, C, G)$ Abbildungen.

Die Abbildung $(A, C, F \circ G)$ heißt die Komposition von f und g.

Bezeichnung: $g \circ f$

Abbildungen und Funktionen

Satz: Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für beliebige Abbildungen $f = (A, B, F)$, $g = (B, C, G)$, $h = (C, D, H)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis: Übung

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Definition: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung.

(1) f heißt surjektiv, falls $f(A) = B$

(2) f heißt injektiv (oder eineindeutig), falls
für alle $a, a' \in A$ gilt: aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$.

(3) f heißt bijektiv (oder umkehrbar eindeutig),
falls f surjektiv und injektiv ist.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist surjektiv

(2) Für alle $b \in B$ gilt $f^{-1}(b) \neq \emptyset$

(3) Es gibt eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$

(4) Für alle Mengen C und alle Abbildungen $r, s : B \to C$ gilt:
Aus $r \circ f = s \circ f$ folgt $r = s$.

Bemerkung: Im Beweis der Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) wird die Tatsache benutzt, dass es eine Funktion gibt, die jeder nichtleeren Menge M ein Element $F(M) \in M$ zuordnet.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Auswahlaxiom (Zermelo)

Zu jeder Menge $\mathcal{M}$ von nichtleeren Mengen
gibt es eine Abbildung f von $\mathcal{M}$,
mit $f(A) \in A$ für jede Menge $A \in \mathcal{M}$.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist injektiv

(2) Für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$

(3) Es gibt eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$

(4) Für alle Mengen D und alle Abbildungen $r, s : D \longrightarrow A$ gilt:
Aus $f \circ r = f \circ s$ folgt $r = s$.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist bijektiv

(2) Für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$

(3) Es gibt genau eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$

Die stets existierende Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$ heißt die zu f inverse Abbildung (oder Umkehrabbildung).

Bezeichnung: f^{-1}

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz:

(1) Die Komposition von injektiven Abbildungen ist injektiv

(2) Die Komposition von surjektiven Abbildungen ist surjektiv

(3) Die Komposition von bijektiven Abbildungen ist bijektiv

Beweis: Übung