Halbordnungsrelationen

Definition

Eine binäre Relation R über A heißt Halbordnungsrelation, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Bezeichnung: $x \leq y$

Sei $\leq$ Halbordnungsrelation über A.

Zwei Elemente $a, b \in A$ heißen vergleichbar bezüglich $\leq$, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

Beispiele

(1) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (d, b)\}$
reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

(2) $\leq \subseteq \mathbb{R}$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

(3) $\mathcal{A}$ Menge aller Aussagen; $\equiv$ logische Äquivalenz
$\mathcal{A}/\equiv$ Quotientenmenge
$[p] \leq [q]$ falls $p \to q \equiv 1$

$\leq$ nicht abhängig von der Wahl der Repräs. der Äquivalenzklassen

(falls $p \equiv p'$ und $q \equiv q'$, so $p \to q \equiv p' \to q'$)

reflexiv	(da $p \to p \equiv 1$)
antisymmetrisch	(da falls $p \to q \equiv 1$ und $q \to p \equiv 1$, so $p \equiv q$)
transitiv	(da falls $p \to q \equiv 1$ und $q \to r \equiv 1$, so $p \to r \equiv 1$)

Beispiele

(4) Teilbarkeitsrelation über $\mathbb{N}$

reflexiv	(da $a \mid a$ für alle $a \in \mathbb{N}$)
antisymmetrisch	(da falls $a \mid b$ und $b \mid a$ so $a = b$)
transitiv	(da falls $a \mid b$ und $b \mid c$ so $a \mid c$)

(5) Teilmengenrelation über $\mathcal{P}(A)$

reflexiv	(da $M \subseteq M$ für alle $M \in \mathcal{P}(A)$)
antisymmetrisch	(da falls $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ so $N = M$)
transitiv	(da falls $M_1 \mid M_2$ und $M_2 \mid M_3$ so $M_1 \mid M_3$)

Halbordnungsrelationen

Definition

Eine Halbordnungsrelation $\leq$ über A heißt Ordnungsrelation, falls für zwei beliebige $x, y \in A$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Halbordnungsrelationen

Bezeichnung: $x < y \stackrel{\text{def}}{=} (x \leq y) \wedge (x \neq y)$

Definition

Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

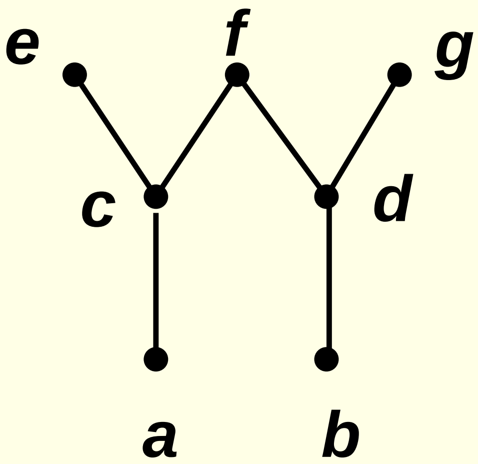
$b \in A$ heißt unmittelbarer Nachfolger von $a \in A$, falls $a < b$ und kein $c \in A$ existiert, mit $a < c$ und $c < b$.

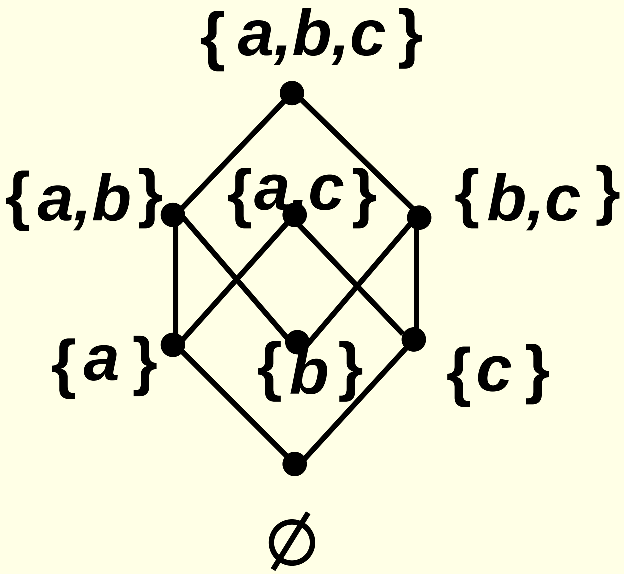
(a unmittelbarer Vorgänger von b)

Graphische Darstellung

Darstellung unmittelbarer Beziehungen

(ursprüngliche Halbordnung kann eindeutig wiedergewonnen werden)





Halbordnungsrelationen

Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge von A.

Definition

- Ein Element $m \in M$ heißt maximales Element in M, wenn für alle $m' \in M$, aus $m \leq m'$ folgt $m = m'$.
- Ein Element $a \in A$ heißt obere Schranke von M, wenn für alle $m \in M$, $a \geq m$.
- Die kleinste obere Schranke von M heißt Supremum von M.
  $a \in A$ ist Supremum von M falls
  (i) $a \geq m$ für alle $m \in M$ (obere Schranke)
  (ii) $a \leq a'$ für alle oberen Schranken a' von M (kleinste)
- Gilt $a \in M$ für das Supremum a von M in A, dann wird a Maximum von M genannt.

Halbordnungsrelationen

Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge von A.

Definition

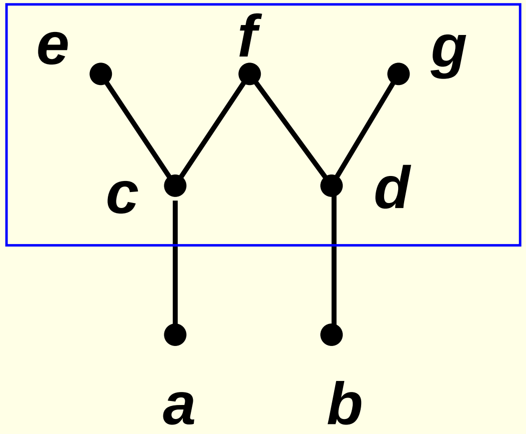
- Ein Element $m \in M$ heißt minimales Element in M, wenn für alle $m' \in M$, aus $m' \leq m$ folgt $m = m'$.
- Ein Element $a \in A$ heißt untere Schranke von M, wenn für alle $m \in M$, $a \leq m$.
- Die grösste untere Schranke von M heißt Infimum von M.

  $a \in A$ ist Infimum von M falls

  (i) $a \leq m$ für alle $m \in M$ (untere Schranke)

  (ii) $a \geq a'$ für alle unteren Schranken a' von M (grösste)
- Gilt $a \in M$ für das Infimum a von M in A, dann wird a Minimum von M genannt.

Beispiele



$M = \{c, d, e, f, g\}$

Maximale Elemente: $\{e, f, g\}$.

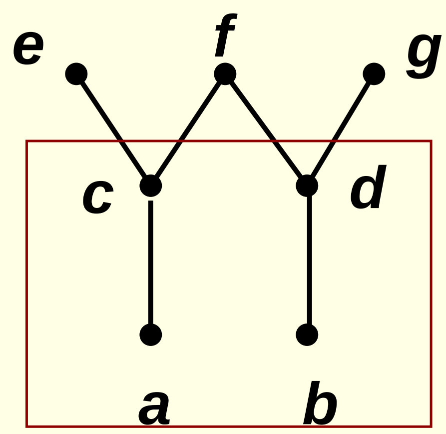
Minimale Elemente: $\{c, d\}$.

Keine obere/untere Schranke.

Kein Supremum/Infimum.

Kein Maximum/Minimum.

Beispiele



$N = \{a, b, c, d\}$

Maximale Elemente: $\{c, d\}$.

Minimale Elemente: $\{a, b\}$.

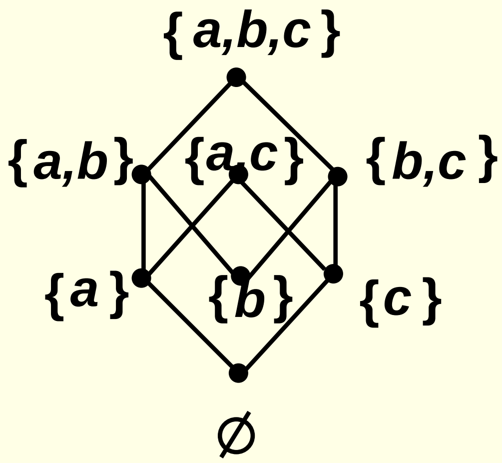
Obere Schranke: $\{f\}$.

Supremum: $\{f\}$.

Kein Infimum.

Kein Minimum.

Beispiele



$M = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$

Ein maximales Element: $\{a, b, c\}$.

Eine obere Schranke: $\{a, b, c\}$.

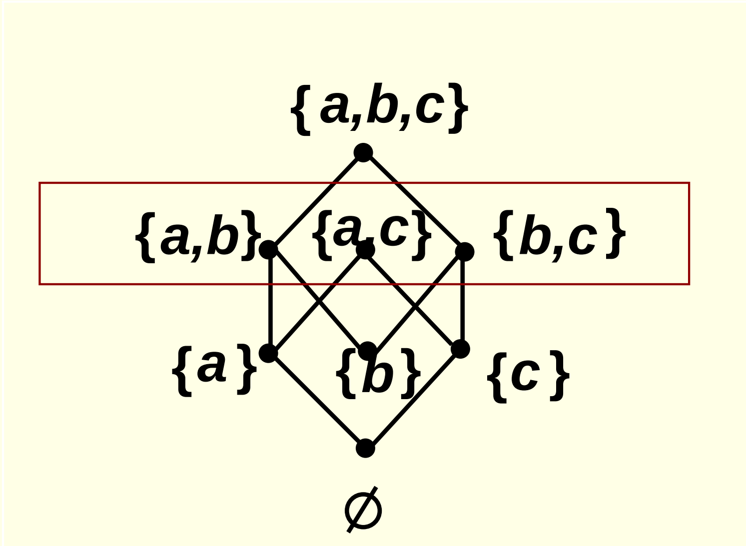
Supremum/Maximum: $\{a, b, c\}$.

Ein minimales Element: $\emptyset$.

Eine untere Schranke: $\emptyset$.

Infimum/Maximum: $\emptyset$.

Beispiele



$M = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

Jedes Element aus M ist maximal.

Jedes Element aus M ist minimal.

Eine obere Schranke: $\{a,b,c\}$.

Supremum: $\{a,b,c\}$

Eine untere Schranke: $\emptyset$

Infimum: $\emptyset$

M besitzt kein Maximum

und kein Minimum

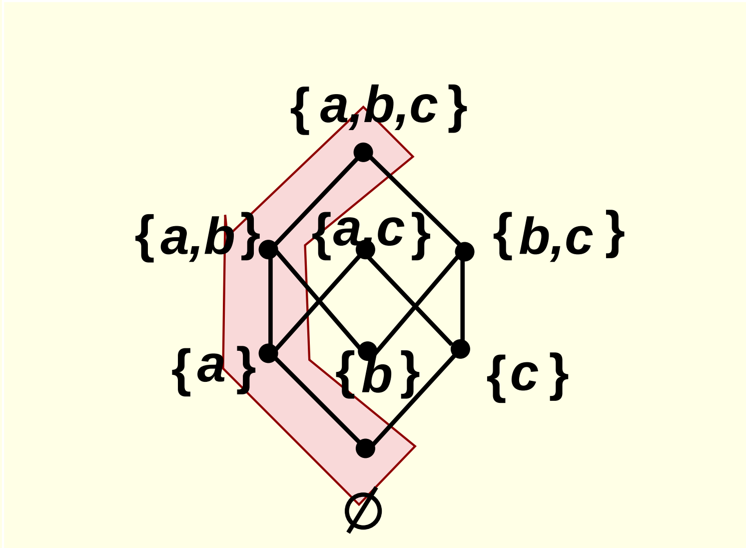
Halbordnungsrelationen

Definition Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

$K \subseteq A$ heißt eine Kette in A bzgl. $\leq$ falls die auf K induzierte Halbordnung $\leq_K$ eine Ordnung ist.

Eine Kette K heißt maximale Kette in A, falls es keine K umfassende Kette in A bzgl. $\leq$ gibt.

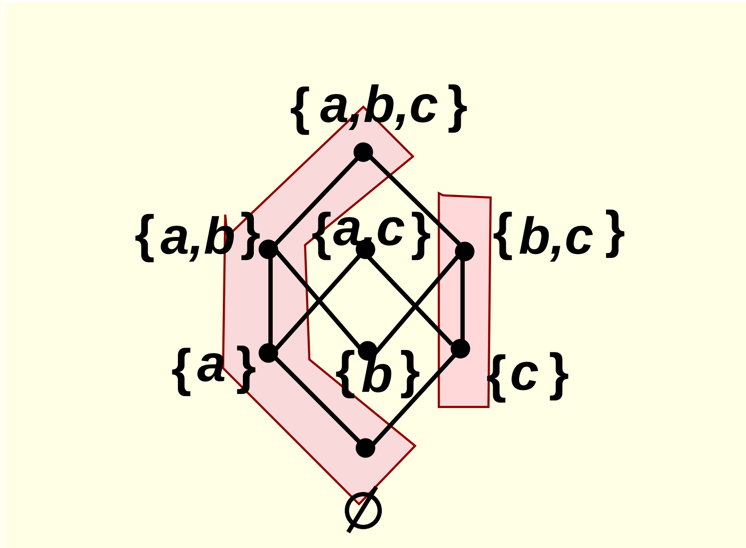
Beispiele



$K_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

K_1 maximale Kette

Beispiele



$K_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

K_1 maximale Kette

$K_2 = \{\{b\}, \{b, c\}\}$

K_2 Kette, nicht maximal

(ist in der Kette

$\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

enthalten)

Halbordnungsrelationen

Definition Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

$K \subseteq A$ heißt eine Kette in A bzgl. $\leq$ falls die auf K induzierte Halbordnung $\leq_K$ eine Ordnung ist.

Eine Kette K heißt maximale Kette in A, falls es keine K umfassende Kette in A bzgl. $\leq$ gibt.

Maximalkettenprinzip

(1) In jeder halbgordneter Menge gibt es bzgl. Mengeninklusion maximale Ketten.

(2) In jeder halbgordneter Menge gibt es zu jeder Kette K eine K umfassende, bzgl. $\leq$ maximale Kette.

Halbordnungsrelationen

Definition Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation über A.

Die Halbordnung is wohlfundiert falls für Ketten

$$x_1 \geq x_2 \geq x_2 \geq \ldots \cdots \geq x_n \geq \ldots$$

endlich sind, d.h. ein m existiert so dass $x_m = x_k$ für alle $k \geq m$.

Beispiele

$(\mathbb{N}, \leq)$ wohlfundiert (nur endliche Ketten $n > n_1 > \ldots$)

$(\mathbb{Z}, \leq)$ nicht wohlfundiert
(unendliche Kette: $1 > 0 > -1 > \cdots - n > \ldots$)

Abbildungen und Funktionen

Definition Sei $F \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen A und B.

(1) F heißt linksvollständig, falls es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ gibt, so dass aFb.

(2) F heißt rechtseindeutig, falls für alle Paare $(a, b), (a, b') \in A \times B$ mit aFb und aFb' gilt $b = b'$.

Abbildungen und Funktionen

Definition Sei $F \subseteq A \times B$ eine linksvollständige und rechtseindeutige Relation. Dann heißt das Tripel $f = (A, B, F)$ Abbildung von A nach B.

F heißt Graph von f.

A Definitionsbereich von f; B Wertenbereich von f.

Bezeichnung: $f : A \to B$.

- $a \in A$: das eindeutig bestimmte Element $b \in B$ mit aFb wird mit $f(a)$ bezeichnet.
- $f(a)$ Bild von a; a Urbild von $f(a)$.
- $f : a \mapsto b$

Abbildungen und Funktionen

Definition

Sei $f = (A, B, F)$ eine Abbildung. Seien $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$.

Bild von M:

$$f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B \mid \exists a : (a \in A \quad \wedge \quad b = f(a))\}$$

Urbild von N:

$$f^{-1}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in N\}$$

$f(A)$ Wertenbereich von f

$f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\{b\})$

Abbildungen und Funktionen

Satz Seien $M_1, M_2 \subseteq A$ und $N_1, N_2 \subseteq B$.
Für jede Abbildung $f : A \longrightarrow B$ gilt:

(1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

(2) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$

(3) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

(4) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$

Abbildungen und Funktionen

Definition: Sei $f = (A, B, F)$ eine Abbildung. Sei $M \subseteq A$.

Die Abbildung $g = (M, B, F \cap (M \times B))$ heißt die Einschränkung von f auf M.

Bezeichnung: $f_{|M}$

Definition: Seien $f = (A, B, F)$, $g = (B, C, G)$ Abbildungen.

Die Abbildung $(A, C, F \circ G)$ heißt die Komposition von f und g.

Bezeichnung: $g \circ f$

Abbildungen und Funktionen

Satz: Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für beliebige Abbildungen $f = (A, B, F)$, $g = (B, C, G)$, $h = (C, D, H)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis: Übung

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Definition: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung.

(1) f heißt surjektiv, falls $f(A) = B$

(2) f heißt injektiv (oder eineindeutig), falls
für alle $a, a' \in A$ gilt: aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$.

(3) f heißt bijektiv (oder umkehrbar eindeutig),
falls f surjektiv und injektiv ist.