Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Definition: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung.

(1) f heißt surjektiv, falls $f(A) = B$

(2) f heißt injektiv (oder eineindeutig), falls
für alle $a, a' \in A$ gilt: aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$.

(3) f heißt bijektiv (oder umkehrbar eindeutig),
falls f surjektiv und injektiv ist.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist surjektiv

(2) Für alle $b \in B$ gilt $f^{-1}(b) \neq \emptyset$

(3) Es gibt eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$

(4) Für alle Mengen C und alle Abbildungen $r, s : B \longrightarrow C$ gilt:
Aus $r \circ f = s \circ f$ folgt $r = s$.

Bemerkung: Im Beweis der Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) wird die Tatsache benutzt, dass es eine Funktion gibt, die jeder nichtleeren Menge M ein Element $F(M) \in M$ zuordnet.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Auswahlaxiom (Zermelo)

Zu jeder Menge $\mathcal{M}$ von nichtleeren Mengen
gibt es eine Abbildung f von $\mathcal{M}$,
mit $f(A) \in A$ für jede Menge $A \in \mathcal{M}$.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist injektiv

(2) Für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$

(3) Es gibt eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$

(4) Für alle Mengen D und alle Abbildungen $r, s : D \longrightarrow A$ gilt:
Aus $f \circ r = f \circ s$ folgt $r = s$.

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist bijektiv

(2) Für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$

(3) Es gibt genau eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$

Die stets existierende Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$ heißt die zu f inverse Abbildung (oder Umkehrabbildung).

Bezeichnung: f^{-1}

Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Satz:

(1) Die Komposition von injektiven Abbildungen ist injektiv

(2) Die Komposition von surjektiven Abbildungen ist surjektiv

(3) Die Komposition von bijektiven Abbildungen ist bijektiv

Beweis: Übung

Folgen und Mengenfamilien

Definition: Eine endliche Folge mit Gliedern aus einer Menge M ist eine Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to M$.
Bezeichnung: $(m_i)_{i\in[n]}$ (wobei $m_i = f(i)$ für alle $i \in I$)

Definition: Eine unendliche Folge mit Gliedern aus M ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$.
Bezeichnung: $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (wobei $m_i = f(i)$ für alle $i \in I$)

Definition: Sei M eine beliebige Menge und sei I eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $f : I \to M$ heißt Indexfunktion von I nach M; I heißt Indexmenge.
Bezeichnung: $(m_i)_{i\in I}$ (wobei $m_i = f(i)$ für alle $i \in I$)

Folgen und Mengenfamilien

Definition: Falls $M \subseteq \mathcal{P}(A)$, und $f : I \to M$ Indexfunktion mit $f(i) = A_i$, so heißt $(A_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie.

Definition: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{m \mid m \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{m \mid \text{ es gibt } i \in I \text{ mit } m \in A_i\}$$

Folgen und Mengenfamilien

Satz (Verallgemeinerte deMorgan'sche Regel)

Sei I eine beliebige Indexmenge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie (bestehend aus Teilmengen einer Menge A). Dann gilt:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

(Komplement bzgl. A)

Kardinalitäten

Definition: Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, falls es eine bijektive Abbildung f von A nach B gibt.

Definition: Eine unendliche Menge A heißt abzählbar unendlich, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. A heißt abzählbar, wenn A endlich oder abzählbar unendlich ist.

Satz: Sämtliche Untermengen $A \subseteq \mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$ sind abzählbar.

Korollar: Ist M eine abzählbare Menge, dann ist jede Untermenge A von M abzählbar.

Kardinalitäten

Satz: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar.

Beweis durch Widerspruch. Idee (Cantor): Diagonalisierung

Annahme: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar, i.e. es gibt $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijektiv.

Sei $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.

$S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so $\exists n_S \in \mathbb{N}$ mit $S = f(n_S)$.

- Falls $n_S \in S$, so erfüllt n_S die Eigenschaft $n_S \notin f(n_S) = S$.
  Widerspruch
- Falls $n_S \notin S$, so erfüllt n_S die charakteristische Eigenschaft von S, d.h. $n_S \in S$.Widerspruch.

Kardinalitäten

Definition: Eine Menge M heißt nicht abzählbar oder überabzählbar, wenn M nicht abzählbar ist.

Mann kann zeigen, daß nicht alle überabzählbaren Mengen die gleiche Mächtigkeit besitzen.

Es gibt überabzählbar viele verschiedene überabzählbare Mächtigkeiten:

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$

...