Mathematisches Beweisen

Mathematische Aussagen

- haben oft die Form: Wenn A, dann B.
- als Formel: $A \longrightarrow B$

Mathematisches Beweis

- im Bezug auf einem vorgegebenen Axiomensystem
- mit Hilfe von Inferenzregeln

Grundlegenden Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $p \longrightarrow q$

- Direkter Beweis:

  Annahme: p gilt. Benutze p, Axiome, und Inferenzregeln um zu beweisen q.

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg q \longrightarrow \neg p$.

- Beweis durch Widerspruch:

  Beweise dass $p \wedge \neg q \longrightarrow$ falsch

Grundlegenden Beweisstrategien

Mathematische Aussagen, die nicht die Form $p \longrightarrow q$ haben

- Äquivalenzbeweis $(p \leftrightarrow q)$

  Beweise dass $p \longrightarrow q$ und $q \longrightarrow p$.

- Beweis durch Fallunterscheidung

  Beweise dass $p_1 \longrightarrow p, \ldots, p_n \longrightarrow p$,

  wobei $p_1 \vee \cdots \vee p_n \equiv$ wahr

Grundlegenden Beweisstrategien

Aussagen mit Quantoren

$\forall x \in U : (p(x) \rightarrow q(x))$

Wähle a beliebig aus dem Universum U.

Beweis der Implikation $p(a) \rightarrow q(a)$.

Da a beliebig gewählt werden kann, folgt $\forall x \in U : p(x) \rightarrow q(x)$

$\exists x \, (p(x) \rightarrow q(x))$

Sei a ein geeignetes Element aus dem Universum U.

Beweis der Implikation $p(a) \rightarrow q(a)$.

Damit folgt $\exists x \in U : p(x) \rightarrow q(x)$.

$\forall x \, \exists y \, A(x, y)$

Grundlegenden Beweisstrategien

Kombinatorische Beweise

- Abzählargumente

Beweise mittels Vollständiger Induktion

Vollständige Induktion

Idee: Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen

Axiome:

(A1) 0 ist eine natürliche Zahl

(A2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $S(n)$

(A3) Aus $S(n) = S(m)$ folgt $n = m$

(A4) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

(A5) Jede Menge X, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion

Idee: Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen

(A5) Jede Menge X, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{lll} \forall X \text{ Menge:} & \text{Falls} & 0 \in X \text{, und} \\ & & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \rightarrow n+1 \in X \\ & & \\ & \text{so} & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \end{array}$$

Vollständige Induktion

Idee: Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen

(A5) $\forall X$ Menge: Falls $0 \in X$, und

$\forall n \in \mathbb{N} : n \in X \rightarrow n+1 \in X$

so $\forall n \in \mathbb{N} : n \in X$

Satz 7.1 (Induktionssatz)

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(0)$ und
- $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \rightarrow p(n+1)$,

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Vollständige Induktion

Idee: Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen

(A5) $\forall X$ Menge: Falls $0 \in X$, und

$\forall n \in \mathbb{N} : n \in X \rightarrow n+1 \in X$

so $\forall n \in \mathbb{N} : n \in X$

Satz 7.1 (Induktionssatz)

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(0)$ und — Induktionsbasis
- $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \rightarrow p(n+1)$, — Induktionsschritt

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Struktur von Induktionsbeweise

(1)	Induktionsbasis:	Beweise $p(0)$
(2)	Induktionsschritt:	Beweise $p(a) \rightarrow p(a+1)$
		für ein beliebiges a

Struktur von Induktionsbeweise

(1)	Induktionsbasis:	Beweise $p(0)$
(2)	Induktionsvoraussetzung:	Für ein beliebig gewähltes $a \in \mathbb{N}$ gilt $p(a)$
(3)	Induktionsschluss:	Folgere $p(a+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(a)$

Verallgemeinerte vollständige Induktion

Satz 7.2 (Verallgemeinerte vollständige Induktion)

Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : p(0) \land p(1) \land \cdots \land p(n) \to p(n+1)$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Induktive Definitionen

Induktive Definition von Folgen:

$$a_0$$

$$a_n = f_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

Induktive Definitionen

Induktive Definition von Mengen:

Beispiel

(1) Menge Σ^* aller Wörter über ein Alphabet Σ

Basismenge:	Das leere Wort $\epsilon \in \Sigma^*$
Erzeugungsregel:	Wenn $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$,
	dann gilt $wa \in \Sigma^*$

Induktive Definitionen

Induktive Definition von Mengen:

Beispiel

(2) Menge aller aussagenlogischer Formeln

Basismenge:	$w, f, x_0, x_1, x_2, \ldots$ sind aussagenlogische Formeln (atomare Formeln)
Erzeugungsregel:	Wenn F_1, F_2 aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln

Wohlfundierte Induktion

Satz 7.2 (Verallgemeinerte vollständige Induktion)
Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : p(0) \land p(1) \land \cdots \land p(n) \to p(n+1)$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Äquivalent zu Satz 7.2:
Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n+1 \to p(k)) \to p(n+1))$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Wohlfundierte Induktion

Satz 7.2 (Verallgemeinerte vollständige Induktion)
Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \qquad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n+1 \rightarrow p(k)) \rightarrow p(n+1))$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Äquivalent zu Satz 7.2:
Gilt die Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \rightarrow p(k)) \rightarrow p(n))$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

Wohlfundierte Induktion

Falls	$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \rightarrow p(k)) \rightarrow p(n))$	P
dann gilt	$\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$	Q

Zu zeigen: $P \rightarrow Q$

Kontrapositionsbeweis: $\neg Q \rightarrow \neg P$

Annahme: $\neg Q := \neg \forall n \in \mathbb{N} : p(n) \equiv \exists n \in \mathbb{N} : \neg p(n)$.

$>$ **wohlfundierte Ordnung auf $\mathbb{N}$:** es gibt keine unendliche Folge $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ mit $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \ldots$.

Sei $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg p(n)\} \neq \emptyset$. Dann hat Y ein minimales Element m, d.h. $\exists m(m \in Y \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : (k < m \rightarrow k \notin Y))) = \neg P$.

Wohlfundierte Induktion

Satz 7.3 (Wohlfundierte Induktion)
Sei $\succ$ eine wohlfundierte partielle Ordnung auf X.

Falls	$\forall x \in X : (\forall y \in X : (y < x \rightarrow p(y)) \rightarrow p(x))$	P
dann gilt	$\forall x \in X : p(x)$	Q

Kontrapositionsbeweis: $\neg Q \rightarrow \neg P$

Annahme: $\neg Q := \neg \forall x \in X : p(x) \equiv \exists x \in X : \neg p(x)$.

$\succ$ **wohlfundierte Ordnung auf X:** es gibt keine unendliche Folge $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ mit $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n \succ \ldots$.

Sei $Y = \{y \in X \mid \neg p(y)\} \neq \emptyset$. Dann hat Y ein minimales Element y_0, d.h. $\exists y_0 (y_0 \in Y \wedge (\forall x \in X : (y_0 \succ x \rightarrow x \notin Y))) = \neg P$.