Aussagen und Aussagenformen

Aussage: Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Aussagenform: Satz mit Variablen, der durch Einsetzen für die Variablen zu einer Aussage wird.

Verknüpfungen von Aussagen

$\neg A$	nicht A	**Negation**
$A \wedge B$	A und B	**Konjunktion**
$A \vee B$	A oder B	**Disjunktion**
$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B	**Implikation**
$A \Leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B	**Äquivalenz**

- $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.
- $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind.
- $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind. Sie ist also genau dann wahr, wenn A oder B oder $A \wedge B$ wahr ist.
- $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Sie ist also insbesondere dann wahr, wenn A falsch ist.
- $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind.

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien: Aussagenverbindungen, die stets wahr sind.

Beispiele: $p \vee (\neg p)$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)
(Tertium non datur)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$ (Prinzip der doppelten Negation)

Kontradiktionen: Aussagenverbindungen, die stets falsch sind.

Beispiel: $p \wedge \neg p$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch)

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Tautologien

Lemma 1.7

Die folgenden Aussagenverbindungen sind Tautologien:

(1) $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (\neg p)$

(2) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

(3) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

$(p \wedge q) \Rightarrow q$

(4) $p \Rightarrow (p \vee q)$

$q \Rightarrow (p \vee q)$

(5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

(6) $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge p) \Rightarrow r$

Logische Äquivalenz

Zwei Aussagenverbindungen $a_1(p_1, \dots, p_n)$ und $a_2(p_1, \dots, p_n)$ heißen logisch äquivalent wenn die Aussagenverbindung $a_1(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow a_2(p_1, \dots, p_n)$ eine Tautologie ist.

Bezeichnung: $a_1 \equiv a_2$

Wichtige Äquivalenzen

Lemma 1.8

Die folgenden Aussagenverbindungen sind logisch äquivalent:

(1) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Kommutativgesetz)

(2) $((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$ (Lemma 1.1, 1.2)

$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$ (Assoziativgesetz)

(3) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Lemma 1.3)

$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivgesetz)

Wichtige Äquivalenzen

... andere wichtige Äquivalenzen:

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p \qquad \text{(Idempotenz)}$$

$$(q \vee (p \wedge q)) \equiv q$$

$$(q \wedge (p \vee q)) \equiv q \qquad \text{(Absorption)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Lemma 1.8 (Fortsetzung)

Die folgenden Aussagenverbindungen sind logisch äquivalent:

(4) $$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$

(5) $$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$ (Kontraposition)

(6) $$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$ (Lemma 1.4)

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$$

Wichtige Äquivalenzen

Lemma 1.8 (Fortsetzung)

Die folgenden Aussagenverbindungen sind logisch äquivalent:

(7) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Lemma 1.3)

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (De Morgan's Regeln)

(8) $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)) \equiv ((p \vee r) \Rightarrow q)$

(9) $(p \wedge q) \equiv p$, falls q Tautologie (Tautologieregeln)

$(p \vee q) \equiv p$, falls q Kontradiktion (Tautologieregeln)

(10) $(\neg\neg p) \equiv p$ (Doppelte Negation)