# Induktion

- **Vollständige Induktion**

  Gelten die beiden Aussagen:

  - $p(0)$ und
  - $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \rightarrow p(n+1)$,

  dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

- **Verallgemeinerte vollständige Induktion**

  Gelten die beiden Aussagen:

  $p(0)$ und

  $\forall n \in \mathbb{N} : p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n) \rightarrow p(n+1)$

  dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Struktur von Induktionsbeweise

- **Vollständige Induktion**

  Induktionsbasis: Beweise $p(0)$

  Induktionsvoraussetzung: Für $a \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt gilt $p(a)$

  Induktionsschluss: Folgere $p(a+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(a)$

- **Verallgemeinerte vollständige Induktion**

  Induktionsbasis: Beweise $p(0)$

  Induktionsvoraussetzung: Für $a \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt gilt $p(0) \wedge \cdots \wedge p(a)$

  Induktionsschluss: Folgere $p(a+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(0) \wedge \cdots \wedge p(a)$

# Induktion

- **Wohlfundierte Induktion**

  Sei $\succ$ eine wohlfundierte strikte Halbordnung auf $X$
  (i.e. $\succ$ transitiv, irreflexiv, wohlfundiert).

  | | |
  |---|---|
  | Falls | $\forall x \in X : (\forall y \in X : (x \succ y \rightarrow p(y)) \rightarrow p(x))$ |
  | dann gilt | $\forall x \in X : p(x)$ |

| | |
|---|---|
| Induktionsbasis: | Beweise $p(m)$ für $m$ minimal in $X$ |
| Induktionsvoraussetzung: | Für $a \in X$ beliebig gewählt gilt |
| | $p(b)$ für jedes $b \in X$ mit $a \succ b$ |
| Induktionsschluss: | Folgere $p(a)$ aus der Induktionsvoraussetzung |

# Induktion

- **Wohlfundierte Induktion**

  Sei $\succ$ eine wohlfundierte strikte Halbordnung auf $X$
  (i.e. $\succ$ transitiv, irreflexiv, wohlfundiert).

  | | |
  |---|---|
  | Falls | $\forall x \in X : (\forall y \in X : (x \succ y \rightarrow p(y)) \rightarrow p(x))$ |
  | dann gilt | $\forall x \in X : p(x)$ |

Induktionsvoraussetzung: Für $a \in X$ beliebig gewählt gilt
$p(b)$ für jedes $b \in X$ mit $a \succ b$

Induktionsschluss: Folgere $p(a)$ aus der Induktionsvoraussetzung

# Induktive Definitionen

## Induktive Definition von Folgen:

$$a_0$$

$$a_n = f_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

# Induktive Definitionen

## Induktive Definition von Mengen:

Beispiel

### (1) Menge $\Sigma^*$ aller Wörter über ein Alphabet $\Sigma$

| | |
|---|---|
| Basismenge: | Das leere Wort $\epsilon \in \Sigma^*$ |
| Erzeugungsregel: | Wenn $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$, |
| | dann gilt $wa \in \Sigma^*$ |

# Induktive Definitionen

## Induktive Definition von Mengen:

Beispiel

### (2) Menge aller aussagenlogischer Formeln

| | |
|---|---|
| Basismenge: | $w, f, x_0, x_1, x_2, \ldots$ sind aussagenlogische Formeln (atomare Formeln) |
| Erzeugungsregel: | Wenn $F_1, F_2$ aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch $\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln |

Form(X)

# Strukturelle Induktion

Form(X) kleinste Menge, die

- $w, f$ und $X$ enthält
- zusammen mit $F$ auch $\neg F$ enthält
- zusammen mit $F_1, F_2$ auch $F_1 \mathrm{op} F_2$ enthält ($\mathrm{op} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(B)$ für alle atomaren Formeln $B \in \{w, f\} \cup X$
- $\forall F \in \mathrm{Form}(X)$ :

$$((F = \neg F_1 \;\wedge p(F_1)) \rightarrow p(F)) \quad \wedge$$
$$((F = F_1 \mathrm{op} F_2 \;\wedge\; p(F_1) \;\wedge\; p(F_2)) \rightarrow p(F))$$

dann gilt auch $\forall F \in \mathrm{Form}(X) : p(F)$.

# Kombinatorische Beweise

- Abzählargumente

**Wichtig in allen Gebieten der Mathematik und Informatik**

- Komplexität von Algorithmen
- Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
- Sicherheit von Computercodes

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Produktregel

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und seien $A_1, \ldots, A_k$ endliche Mengen.

Dann gilt $|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

### Summenregel

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und seien $A_1, \ldots, A_k$ paarweise disjunkte

endliche Mengen. Dann gilt $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Abbildungsanzahl

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen.

Dann gilt $|\{f \mid f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$

### Anzahl eineindeutiger Abbildungen

Sei $A$ eine endliche Menge.

Dann gilt $|\{f \mid f : A \to A \text{ eineindeutig }\}| = |A|!$

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Anzahl der Untermengen einer endlichen Menge

Sei $A$ eine endliche Menge.

Dann gilt $|\{S \mid S \subseteq A\}| = |2|^{|A|}$

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Inklusions-Exklusionsprinzip

Seien $A_1, A_2$ endliche Mengen.

Dann gilt: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

Seien $A_1, A_2, A_3$ endliche Mengen.

Dann gilt:
$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \quad & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
& -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
& +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}
$$

## Grundlegende Zählprinzipien

### Inklusions-Exklusionsprinzip

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} ((-1)^{k+1} \cdot \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1 \\ \text{paarweise verschieden}}}^{n} |A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}|)$$

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Dirichlets Taubenschlagprinzip:

Halten sich $k+1$ Tauben in $k$ Taubenschlägen auf, so gibt es mindestens einen Taubenschlag, in dem sich wenigstens zwei Tauben befinden.

### Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Halten sich $n$ Objekte auf $k$ Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das wenigstens $\frac{n}{k}$ Objekte enthält.

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Halten sich $n$ Objekte auf $k$ Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das wenigstens $\frac{n}{k}$ Objekte enthält.

**Satz:** Seien $A, B$ zwei endlichen Mengen, und sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion. Dann gibt es ein Element $b_0 \in B$ mit $|f^{-1}(b_0)| \geq \frac{|A|}{|B|}$.

# Zählen

## Grundlegende Zählprinzipien

### Dirichlets & Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Beispiele

**Satz:** In einer Gruppe von acht Leuten haben mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag.

**Satz:** In jeder Menge $A$, die aus drei natürlichen Zahlen gebildet werden kann, sind stets zwei Zahlen, deren Summe gerade ist.

**Satz:** Sei $A$ eine Gruppe von 6 Leuten, von denen jede beliebig ausgewählte Zweiergruppe entweder befreundet oder verfeindet ist. Dann gibt es in dieser Gruppe 3 Leute, die paarweise befreundet oder die paarweise verfeindet sind.