Induktive Definition von Mengen

Beispiel

(1) Menge Σ^* aller Wörter über ein Alphabet Σ

Basismenge:	Das leere Wort $\epsilon \in \Sigma^*$
Erzeugungsregel:	Wenn $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$, dann gilt $wa \in \Sigma^*$

Induktive Definition von Mengen

Beispiel

(2) Menge aller aussagenlogischen Formeln

Basismenge: $w, f, x_0, x_1, x_2, \ldots$ sind aussagenlogische Formeln (atomare Formeln)

Erzeugungsregel: Wenn F_1, F_2 aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch $\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln

Form(X)

Strukturelle Induktion

Form(X) kleinste Menge, die

- w, f und X enthält
- zusammen mit F auch $\neg F$ enthält
- zusammen mit F_1, F_2 auch $F_1 \mathrm{op} F_2$ enthält ($\mathrm{op} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Induktion über den induktiven Aufbau der Formeln

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(B)$ für alle atomaren Formeln $B \in \{w, f\} \cup X$
- $\forall F \in \mathrm{Form}(X)$:

$$((F = \neg F_1 \ \wedge p(F_1)) \rightarrow p(F)) \quad \wedge$$
$$((F = F_1 \mathrm{op} F_2 \ \wedge \ p(F_1) \ \wedge \ p(F_2)) \rightarrow p(F))$$

dann gilt auch $\forall F \in \mathrm{Form}(X) : p(F)$.

Kombinatorische Beweise

- Abzählargumente

Wichtig in allen Gebieten der Mathematik und Informatik

- Komplexität von Algorithmen
- Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
- Sicherheit von Computercodes

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Summenregel

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und seien $A_1, \dots, A_k$ paarweise disjunkte

endliche Mengen. Dann gilt $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Produktregel

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und seien $A_1, \dots, A_k$ endliche Mengen.

Dann gilt $|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Abbildungsanzahl

Seien A und B endliche Mengen.

Dann gilt $|\{f \mid f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$

Anzahl eineindeutiger Abbildungen

Sei A eine endliche Menge.

Dann gilt $|\{f \mid f : A \to A \text{ eineindeutig }\}| = |A|!$

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge

Sei A eine endliche Menge.

Dann gilt $|\{S \mid S \subseteq A\}| = |2|^{|A|}$

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Inklusions-Exklusionsprinzip

Seien A_1, A_2 endliche Mengen.

Dann gilt: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

Seien A_1, A_2, A_3 endliche Mengen.

Dann gilt:
$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \quad & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

Grundlegende Zählprinzipien

Inklusions-Exklusionsprinzip

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} ((-1)^{k+1} \cdot \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1 \\ \text{paarweise verschieden}}}^{n} |A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}|)$$

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Dirichlets Taubenschlagprinzip:

Halten sich $k + 1$ Tauben in k Taubenschlägen auf, so gibt es mindestens einen Taubenschlag, in dem sich wenigstens zwei Tauben befinden.

Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Halten sich n Objekte auf k Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das wenigstens $\frac{n}{k}$ Objekte enthält.

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Halten sich n Objekte auf k Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das wenigstens $\frac{n}{k}$ Objekte enthält.

Satz: Seien A, B zwei endlichen Mengen, und sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion. Dann gibt es ein Element $b_0 \in B$ mit $|f^{-1}(b_0)| \geq \frac{|A|}{|B|}$.

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Dirichlets & Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Beispiele

Satz: In einer Gruppe von acht Leuten haben mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag.

Satz: In jeder Menge A, die aus drei natürlichen Zahlen gebildet werden kann, sind stets zwei Zahlen, deren Summe gerade ist.

Satz: Sei A eine Gruppe von 6 Leuten, von denen jede beliebig ausgewählte Zweiergruppe entweder befreundet oder verfeindet ist. Dann gibt es in dieser Gruppe 3 Leute, die paarweise befreundet oder die paarweise verfeindet sind.

Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten

Definition: Eine Anordnung aller Elemente einer endlichen Menge heißt Permutation.

Satz: Die Anzahl aller Permutationen einer n-elementiger Menge S ist $n!$.

Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten

Definition: Eine k-Permutation einer endlicher Menge S ist eine Permutation einer k-elementiger Teilmenge von S.

Satz: Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 1$. Die Anzahl aller k-Permutationen einer n-elementiger Menge S ist $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, wobei:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten

Definition: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementiger Menge wird durch $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

Satz: Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 1$. Für die Anzahl $\binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Pascal'sche Dreieck

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\ldots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Rechnen mit Binomialkoeffizienten

Pascal'sche Dreieck

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	**1**	**1**							
2	1	**2**	1						
3	1	**3**	**3**	1					
4	1	4	**6**	4	1				
5	1	5	10	**10**	**5**	1			
6	1	6	15	20	**15**	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pascal'sche Dreieck

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	1	1							
2	**1**	**2**	1						
3	1	**3**	3	1					
4	1	**4**	**6**	4	1				
5	1	5	**10**	10	5	1			
6	1	6	**15**	**20**	15	6	1		
7	1	7	21	**35**	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pascal'sche Gleichung und Verallgemeinerung

Satz (Pascal'sche Gleichung)

Für alle natürliche Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Satz (Gleichung von Vandermonde)

Für alle natürliche Zahlen k, m und n mit $k \leq m$ und $k \leq n$ gilt:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i}$$

Weitere Gleichungen

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{k-i}$$

Weitere Gleichungen

Satz (Binomischer Satz)

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} \cdot y^j$$

Korollare:

(1) $$\sum_{j=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{j} = 0$$

(2) $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2.$$

Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!}$$

Beispiel: $\binom{-2}{3} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2\cdot 3} = -4$

Satz Für alle natürlichen Zahlen k und r gilt:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k-r-1}{k}$$