Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Dirichlets Taubenschlagprinzip:

Halten sich $k+1$ Tauben in k Taubenschlägen auf, so gibt es mindestens einen Taubenschlag, in dem sich wenigstens zwei Tauben befinden.

Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Halten sich n Objekte auf k Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das wenigstens $\frac{n}{k}$ Objekte enthält.

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:

Halten sich n Objekte auf k Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das wenigstens $\frac{n}{k}$ Objekte enthält.

Satz: Seien A, B zwei endlichen Mengen, und sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion. Dann gibt es ein Element $b_0 \in B$ mit $|f^{-1}(b_0)| \geq \frac{|A|}{|B|}$.

Zählen

Grundlegende Zählprinzipien

Dirichlets & Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip:
Beispiele

Satz: In einer Gruppe von acht Leuten haben mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag.

Satz: In jeder Menge A, die aus drei natürlichen Zahlen gebildet werden kann, sind stets zwei Zahlen, deren Summe gerade ist.

Satz: Sei A eine Gruppe von 6 Leuten, von denen jede beliebig ausgewählte Zweiergruppe entweder befreundet oder verfeindet ist. Dann gibt es in dieser Gruppe 3 Leute, die paarweise befreundet oder die paarweise verfeindet sind.

Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten

Definition: Eine Anordnung aller Elemente einer endlichen Menge heißt Permutation.

Satz: Die Anzahl aller Permutationen einer n-elementiger Menge S ist $n!$.

Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten

Definition: Eine k-Permutation einer endlicher Menge S ist eine Permutation einer k-elementiger Teilmenge von S.

Satz: Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 1$. Die Anzahl aller k-Permutationen einer n-elementiger Menge S ist $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, wobei:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten

Definition: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementiger Menge wird durch $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

Satz: Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 1$. Für die Anzahl $\binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Pascal'sche Dreieck

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Rechnen mit Binomialkoeffizienten

Pascal'sche Dreieck

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	**1**	**1**							
2	1	**2**	1						
3	1	**3**	**3**	1					
4	1	4	**6**	4	1				
5	1	5	10	**10**	**5**	1			
6	1	6	15	20	**15**	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pascal'sche Dreieck

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\ldots$
0	1								
1	1	1							
2	**1**	**2**	1						
3	1	**3**	3	1					
4	1	**4**	**6**	4	1				
5	1	5	**10**	10	5	1			
6	1	6	**15**	**20**	15	6	1		
7	1	7	21	**35**	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pascal'sche Gleichung und Verallgemeinerung

Satz (Pascal'sche Gleichung)

Für alle natürliche Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Satz (Gleichung von Vandermonde)

Für alle natürliche Zahlen k, m und n mit $k \leq m$ und $k \leq n$ gilt:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i}$$

Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

Basis (1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = 0$

(2) $\forall n, k \in \mathbb{N}$ mit $n < k \quad \binom{n}{k} = 0$

Regel $\forall n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

2. Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	1	**1**							
2	1	**2**	1						
3	1	**3**	3	1					
4	1	**4**	6	4	1				
5	1	**5**	10	10	5	1			
6	1	6	**15**	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

Satz Für alle natürlichen Zahlen k und n gilt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k}$$

3. Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

3. Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\ldots$
0	1								
1	**1**	1							
2	1	**2**	1						
3	1	3	**3**	1					
4	1	4	**6**	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

3. Induktive Definition der Binomialkoeffizienten

Satz Für alle natürlichen Zahlen k und n mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{k-i}$$

Weitere Gleichungen

Satz (Binomischer Satz)

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} \cdot y^j$$

Korollare:

$$(1) \quad \sum_{j=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{j} = 0 \qquad\qquad (2) \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2.$$

Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot \cdots \cdot (r-k+1)}{k!}$$

Beispiel: $\binom{-2}{3} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{1\cdot2\cdot3} = -4$

Satz Für alle natürlichen Zahlen k und r gilt:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k-r-1}{k}$$