Graphen

Leonard Euler (1736)

Die Brücken von Königsberg

- Beschreibung der Stadt Königsberg mit Hilfe von Graphen:
    - Knoten
    - Verbindungskanten zwischen Knoten

Grundbegriffe

Definition. Ein (gerichteter) Graph $G = (V, E)$ ist eine Struktur, die aus zwei Bestandteilen besteht:

- V Menge (Menge von Knoten)
- $E \subseteq V \times V$ Relation über V (Menge von Kanten)

$v \in V$: Knoten

$e = (u, v) \in E$: Kante

u **Startknoten** von e

v **Endknoten** von e

u, v: adjazente Knoten

Graphen: Beispiele

- $G = (V, \emptyset)$ Nullgraph
- $G = (V, V \times V)$ vollständiger Graph

$\dots$

Graphen: Diagrammdarstellung

Knoten $v \in V$ $\quad\mapsto\quad$ Punkt P_v

Kante $(u, v) \in E$ $\quad\mapsto\quad$ gerichteter Pfeil der von P_u nach P_v führt

Ungerichtete Graphen

Definition. Besitzt die Kantenmenge E eines Graphen $G = (V, E)$ die Eigenschaft, als Relation $E \subseteq V \times V$ betrachtet symmetrisch zu sein

d.h. mit jedem $(u, v) \in E$ auch (v, u) zu enthalten

dann sprechen wir von einem ungerichteten Graphen.

Die Kanten eines ungerichteten Graphen können als 2-elementige Knotenmengen $\{u, v\}$ geschrieben werden.

Diagrammdarstellung:

anstelle der zwei Pfeile von u nach v bzw. von v nach u:

eine einzige ungerichtete Verbindungslinie zwischen u und v

Graphen

Vollständige Graphen: $G = (V, E)$, $E = V \times V$

Bipartite Graphen: $G = (V, E)$ mit:

$V = U \cup W$ mit U, W disjunkt

$(u, v) \in E \Rightarrow (u \in U \ \wedge \ v \in W) \ \vee \ (u \in W \ \wedge \ v \in U)$

Vollständige bipartite Graphen: $G = (V, E)$ mit:

$V = U \cup W$ mit U, W disjunkt

die Kanten verbinden jedem Knoten aus U

mit jedem Knoten aus W.

Untergraph

Definition. Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen. H heißt Untergraph oder Teilgraph von G, wenn
$V_H \subseteq V_G \quad$ und $\quad E_H \subseteq E_G$

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ist $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge V von G, dann heißt der Graph $G[V'] = (V', E')$ mit

$$E' = \{(u, v) \mid u, v \in V' \text{ und } (u, v) \in E\}$$

der durch V' induzierte Teilgraph von G.

Vereinigung von Graphen

Definition. Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen.

Die Vereinigung von G und G' ist der Graph

$$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$$

Der Komplement von G ist der Graph

$$\neg G = (V, V \times V \setminus E)$$

Gilt $V = V'$, dann ist der Durchschnitt von G und G' der Graph

$$G \cap G' = (V, E \cap E')$$

Ausgrad, Ingrad eines Knoten

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$.

Der Ausgrad von v (i.Z. $outdeg(v)$) ist die Zahl der Kanten, die v als Startknoten besitzen

Der Ingrad von v (i.Z. $indeg(v)$) ist die Zahl der Kanten, die v als Endknoten besitzen

Ist G ein ungerichteter Graph, so stimmen Ingrad und Ausgrad von v überein, und wird vom Grad von v gesprochen (i.Z. $deg(v)$).

Ausgrad, Ingrad eines Knoten

Satz.

(1) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Dann gilt

$$\sum_{v \in V} indeg(v) = \sum_{v \in V} outdeg(v) = |E|.$$

(2) Ist G ungerichtet, dann gilt:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

Korollar In einem ungerichteten Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Ausgrad, Ingrad eines Knoten

Definition. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt regulär, wenn alle seine Knoten vom gleichen Grad sind.

Korollar In einem regulären Graphen $G = (V, E)$ mit Knotengrad k gilt:

$$k \cdot |V| = 2 \cdot |E|$$