Ausgrad, Ingrad eines Knoten

Satz.

(1) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Dann gilt

$$\sum_{v \in V} indeg(v) = \sum_{v \in V} outdeg(v) = |E|.$$

(2) Ist G ungerichtet, dann gilt:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

Korollar In einem ungerichteten Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Ausgrad, Ingrad eines Knoten

Definition. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt regulär, wenn alle seine Knoten vom gleichen Grad sind.

Korollar In einem regulären Graphen $G = (V, E)$ mit Knotengrad k gilt:

$$k \cdot |V| = 2 \cdot |E|$$

Beispiel: Handy

Ein Handy kann sich in verschiedenen Zuständen befinden.
Beispielsweise:

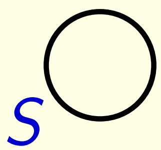
- Startzustand (direkt nach dem Einschalten).
- Benutzer gibt Telefonnummer ein.
- Telefonnummer ist vollständig eingegeben;
  Handy versucht, Basisstation zu erreichen.
- Kontakt zur Basisstation aufgenommen;
  anderer Teilnehmer wird angerufen.
- Gespräch wird geführt.

  . . .

Beispiel: Handy

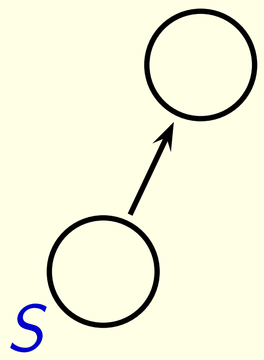
Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.

Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

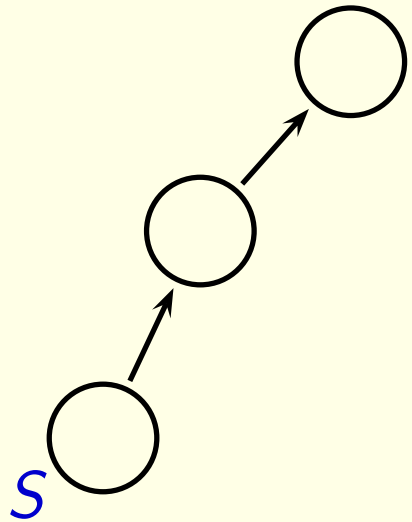
Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.
Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.

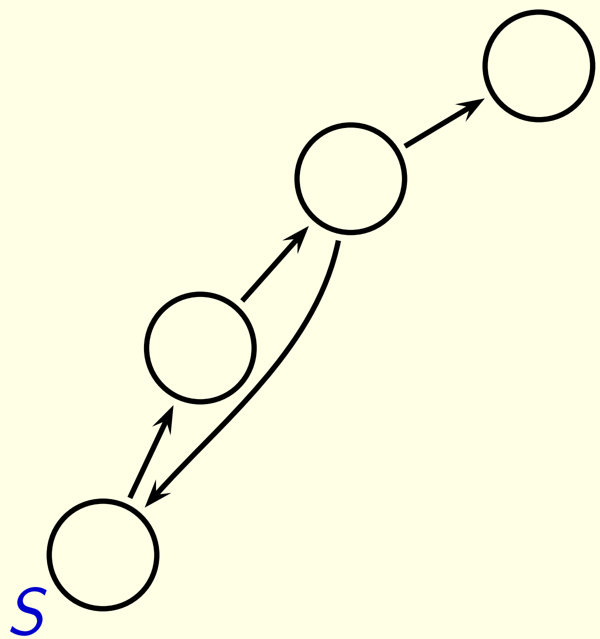
Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

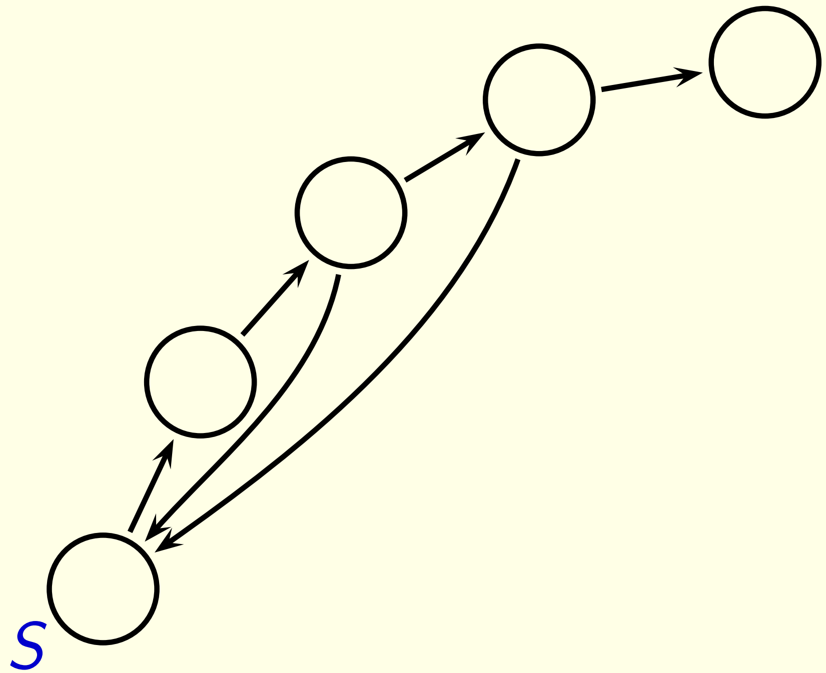
Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.

Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

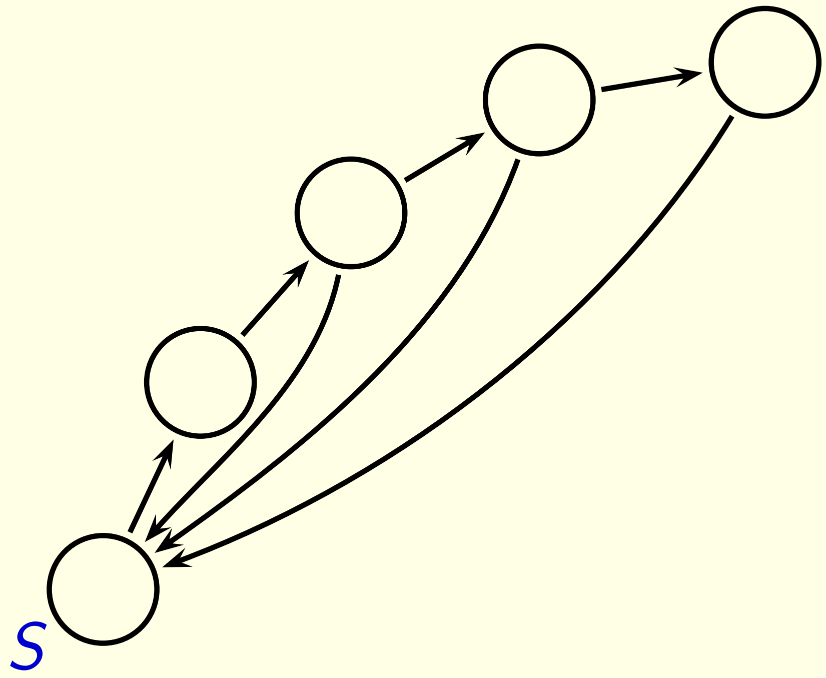
Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.
Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.

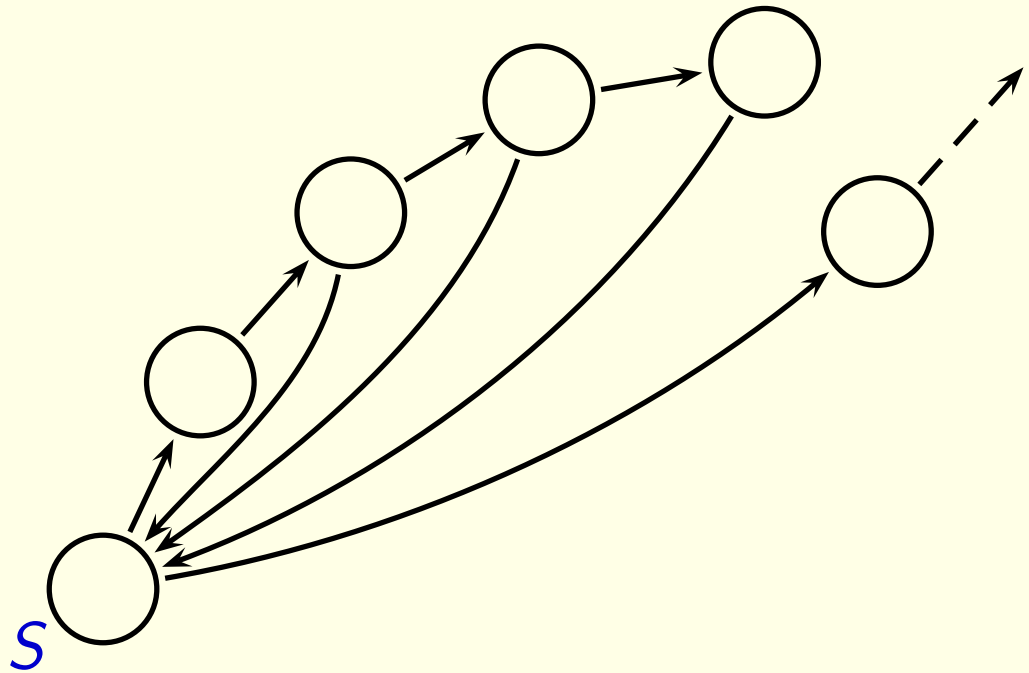
Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.

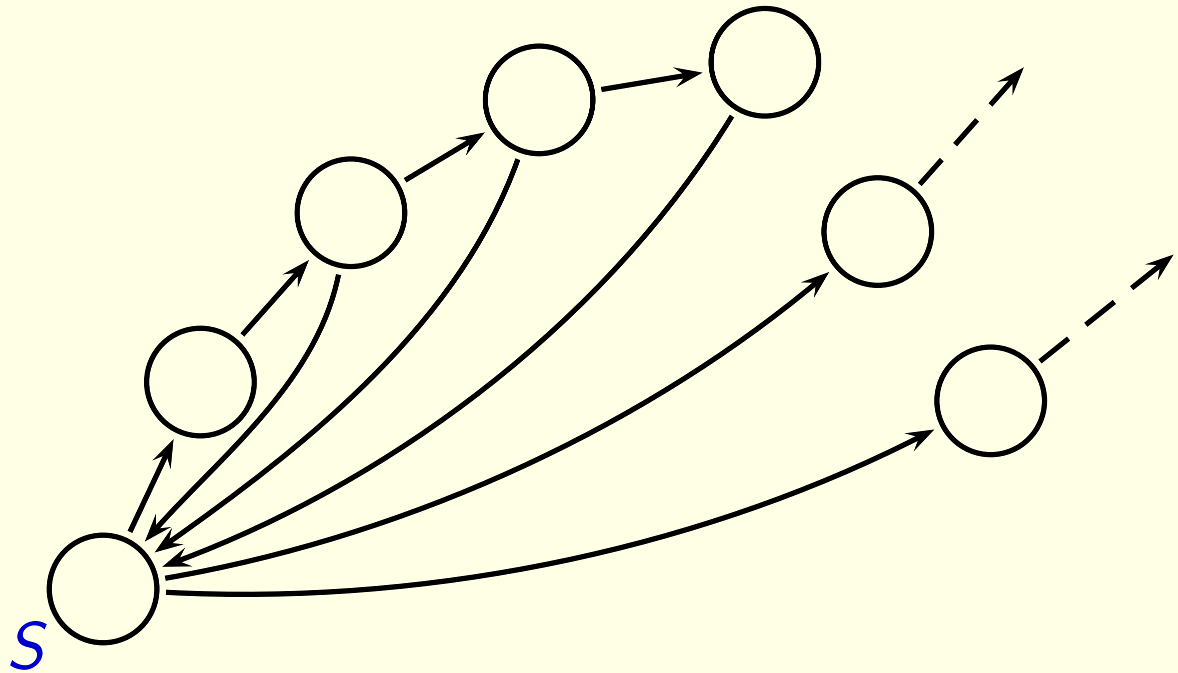
Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



Beispiel: Handy

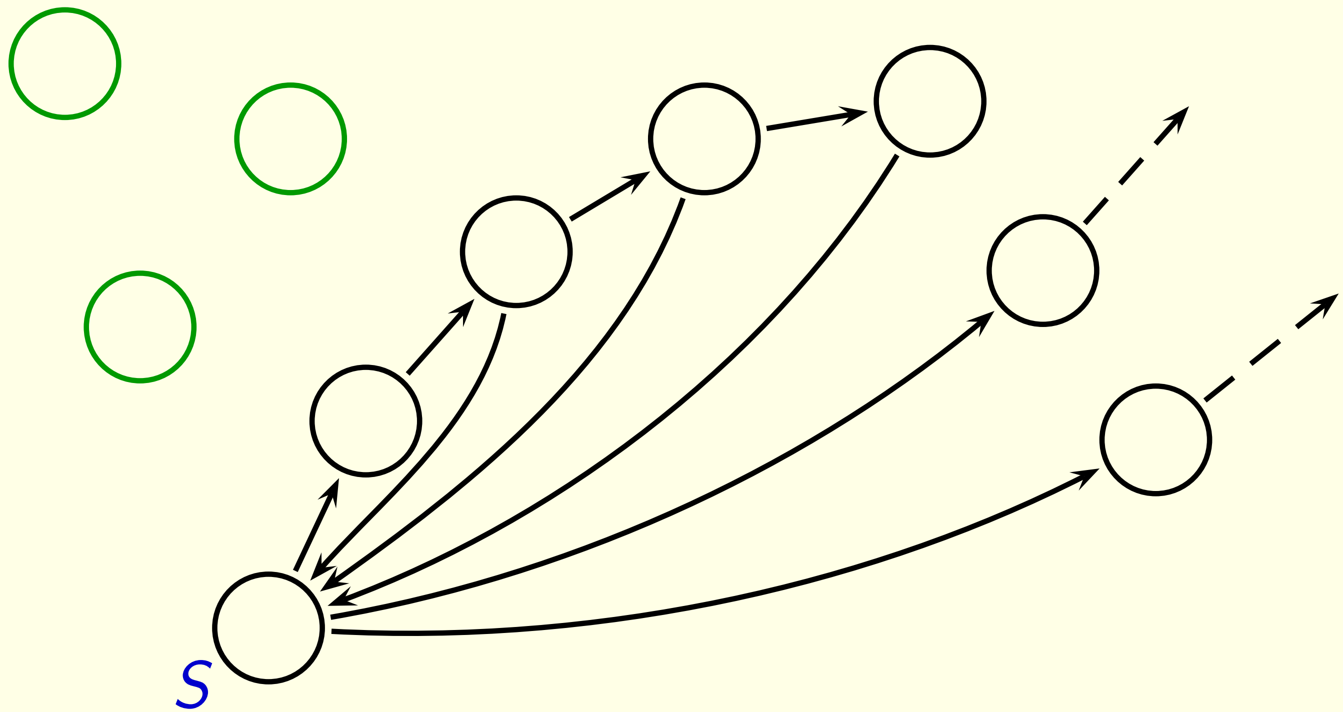
Wir stellen die Zustände durch Kreise dar.

Wenn es möglich ist, von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, zeichnen wir einen Pfeil dazwischen:



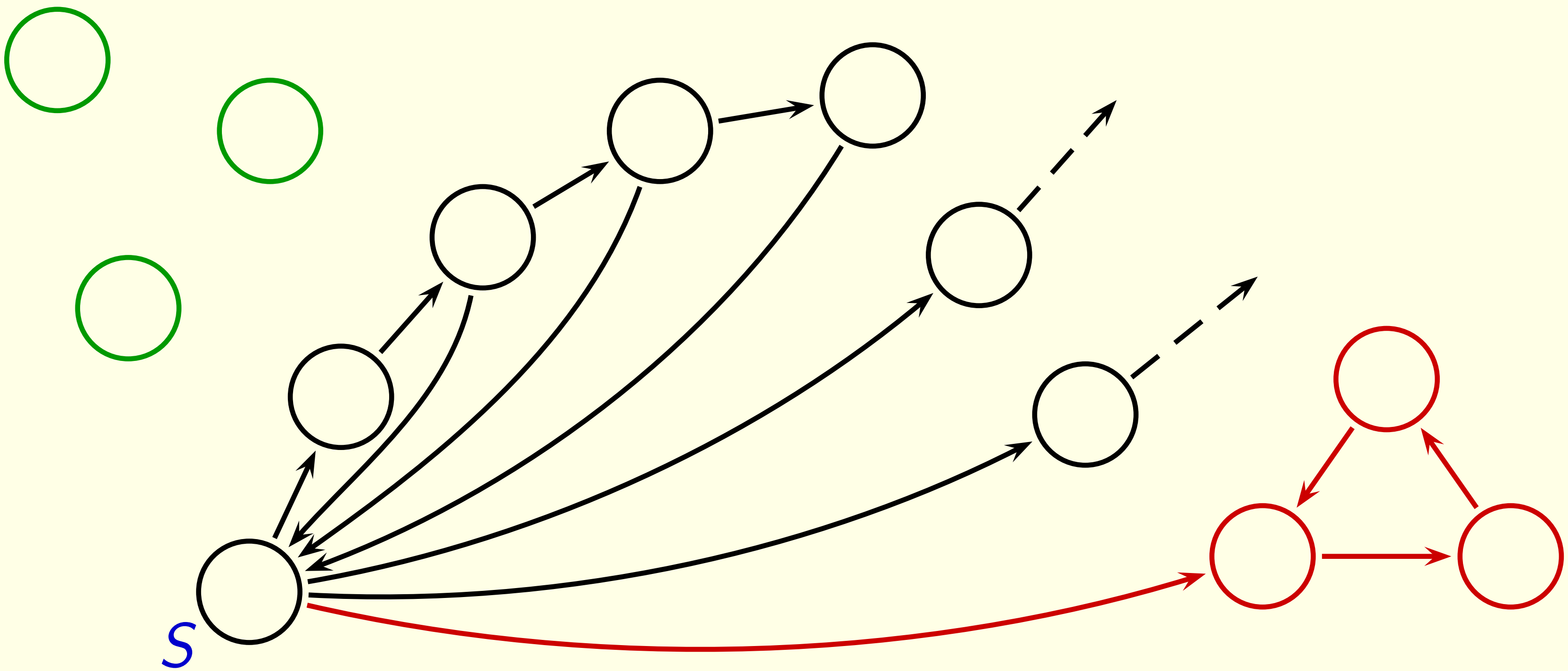
Beispiel: Handy

Es kann auch „unmögliche“ Zustände geben.
Aber diese dürfen dann natürlich nicht vom Startzustand aus erreichbar sein.



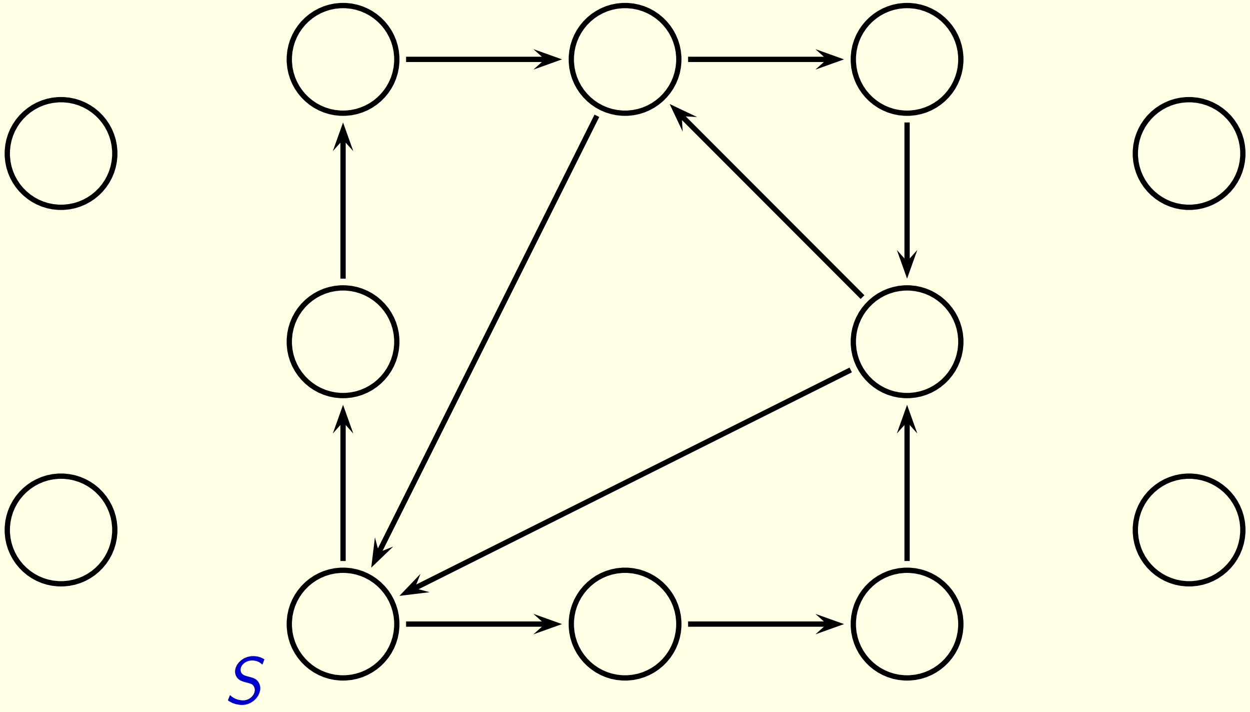
Beispiel: Handy

Was es aber auf keinen Fall geben darf, das sind Sackgassen.



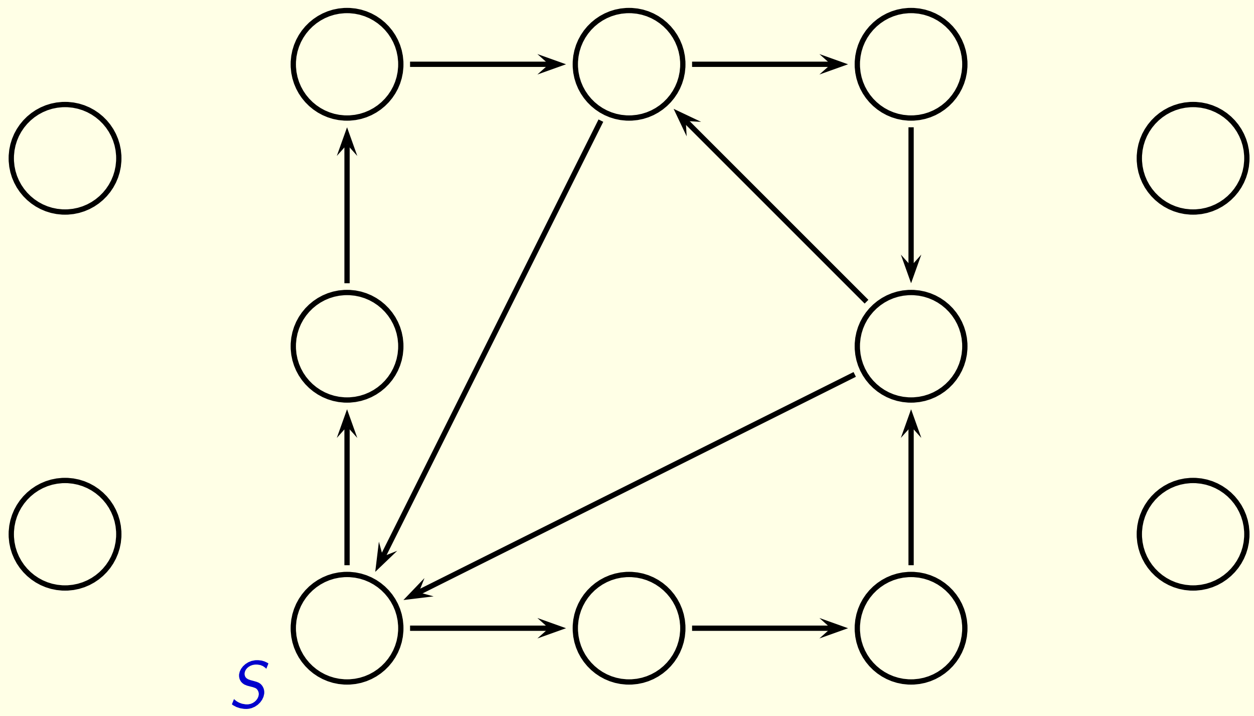
Beispiel: Handy

Frage: Wie kann man automatisch feststellen, ob irgendein Zustandsdiagramm eine Sackgasse besitzt?



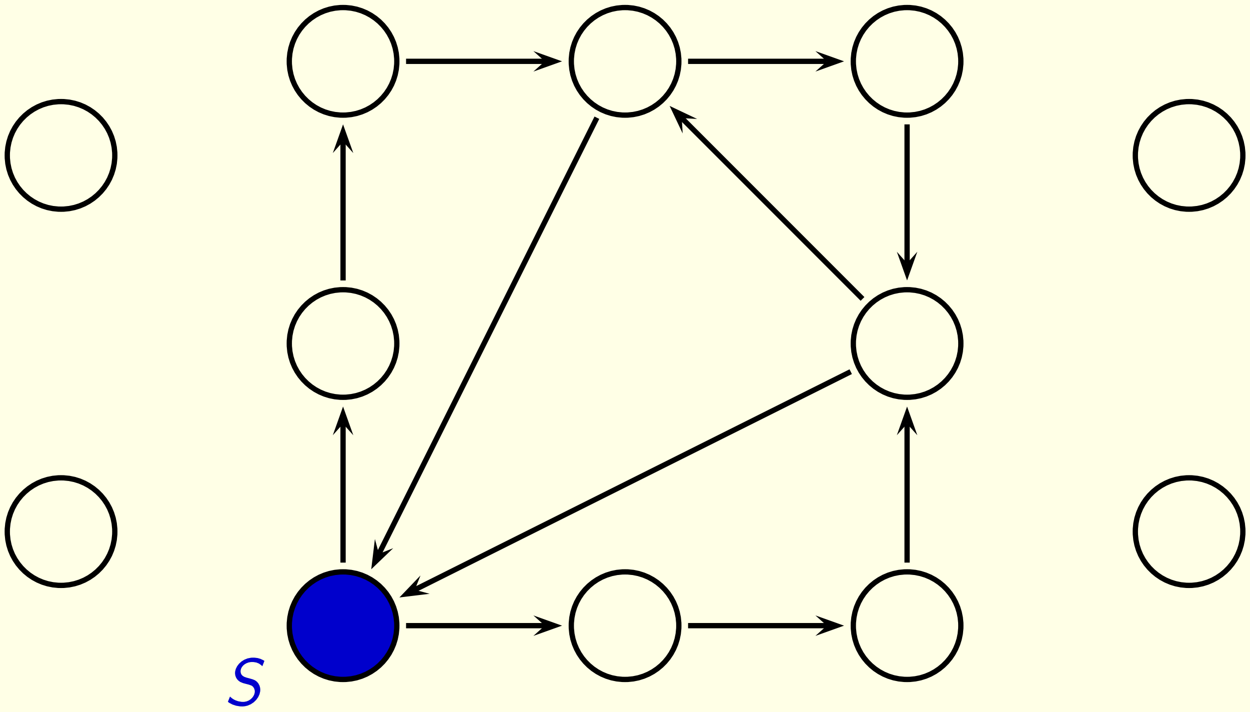
Beispiel: Handy

Zuerst ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man S erreichen kann.



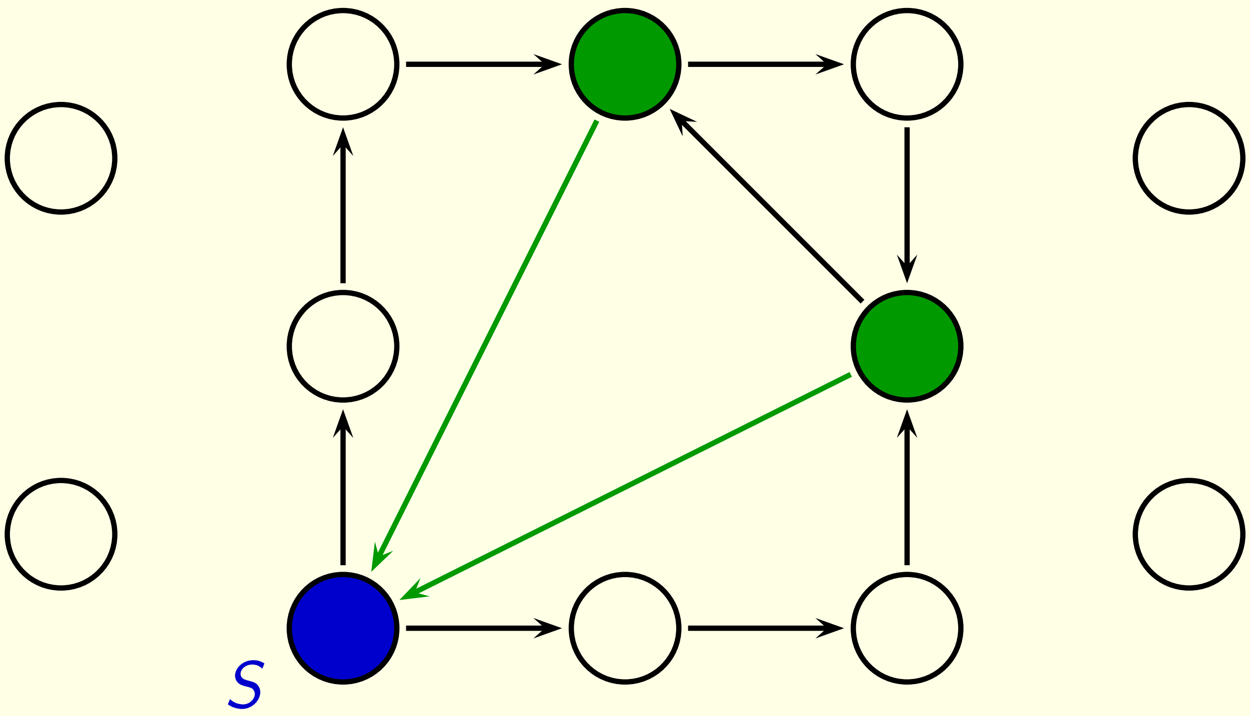
Beispiel: Handy

Zuerst ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man S erreichen kann.



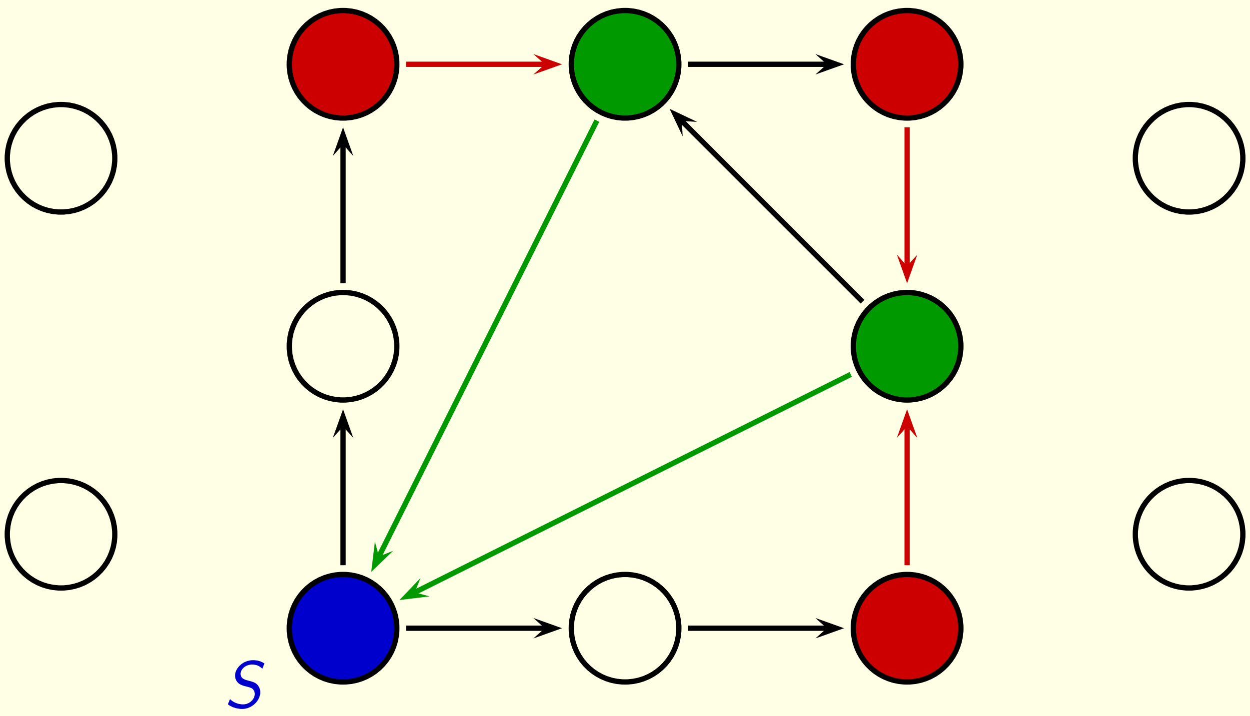
Beispiel: Handy

Zuerst ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man S erreichen kann.



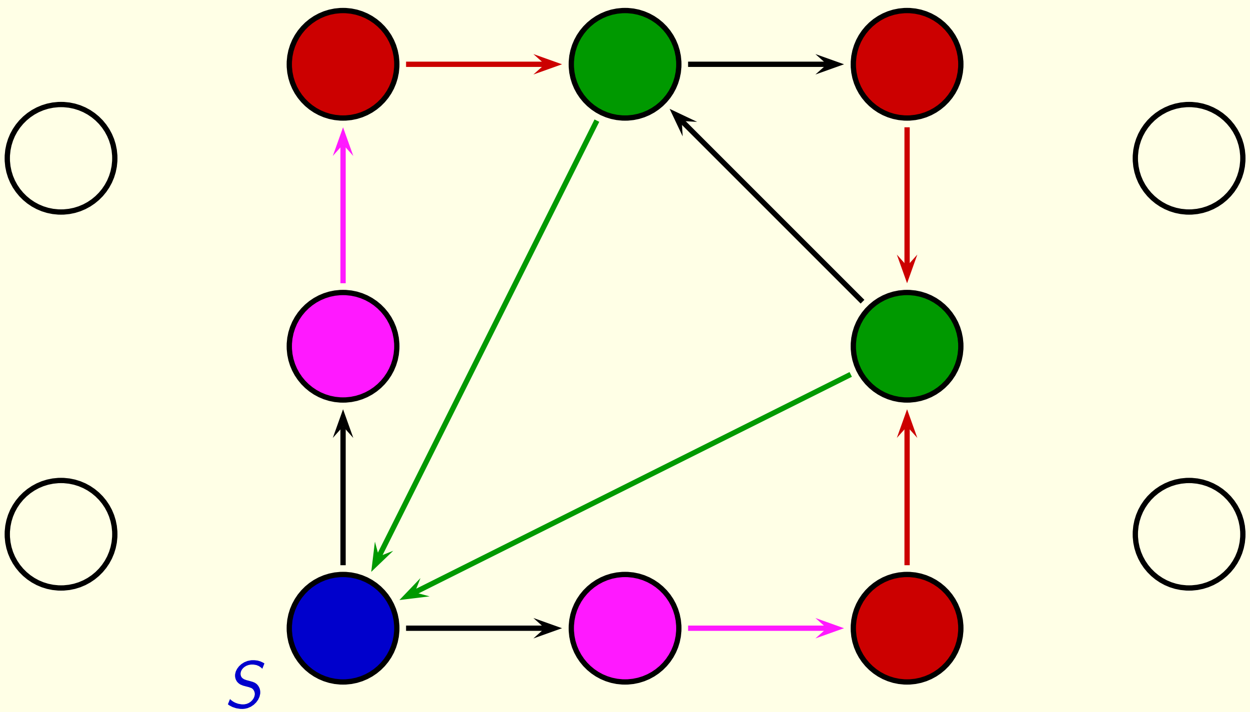
Beispiel: Handy

Zuerst ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man S erreichen kann.



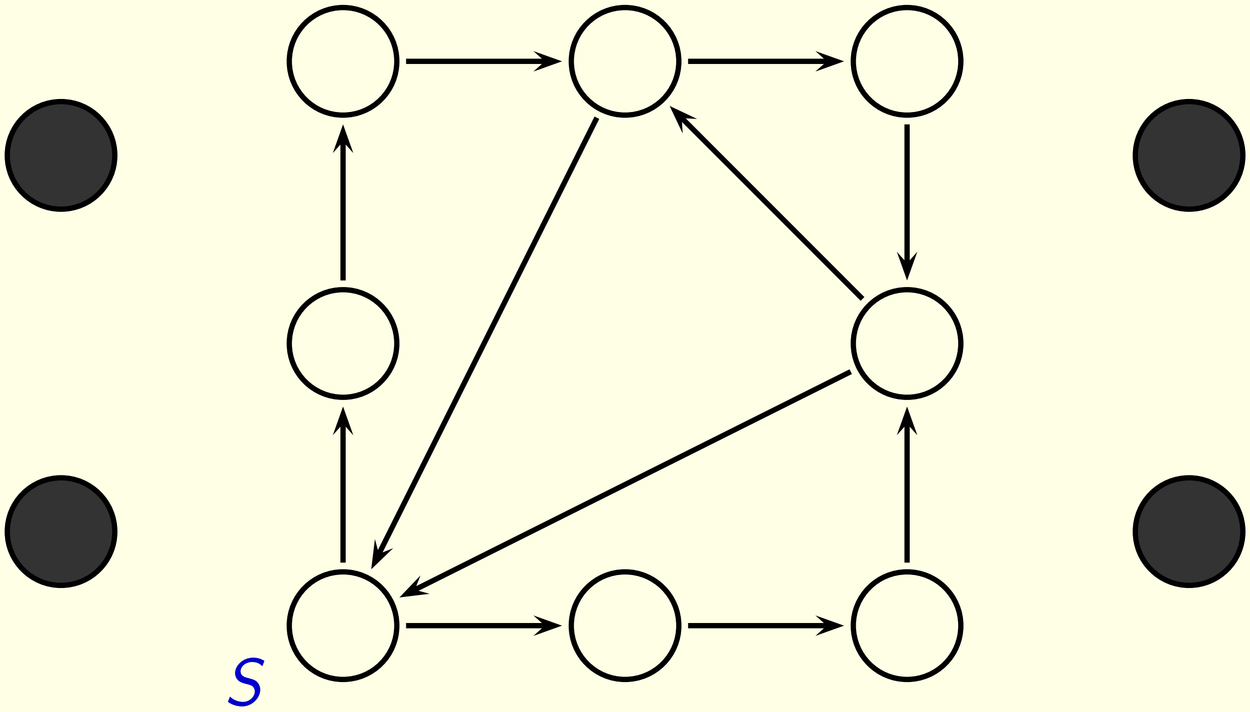
Beispiel: Handy

Zuerst ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man S erreichen kann.



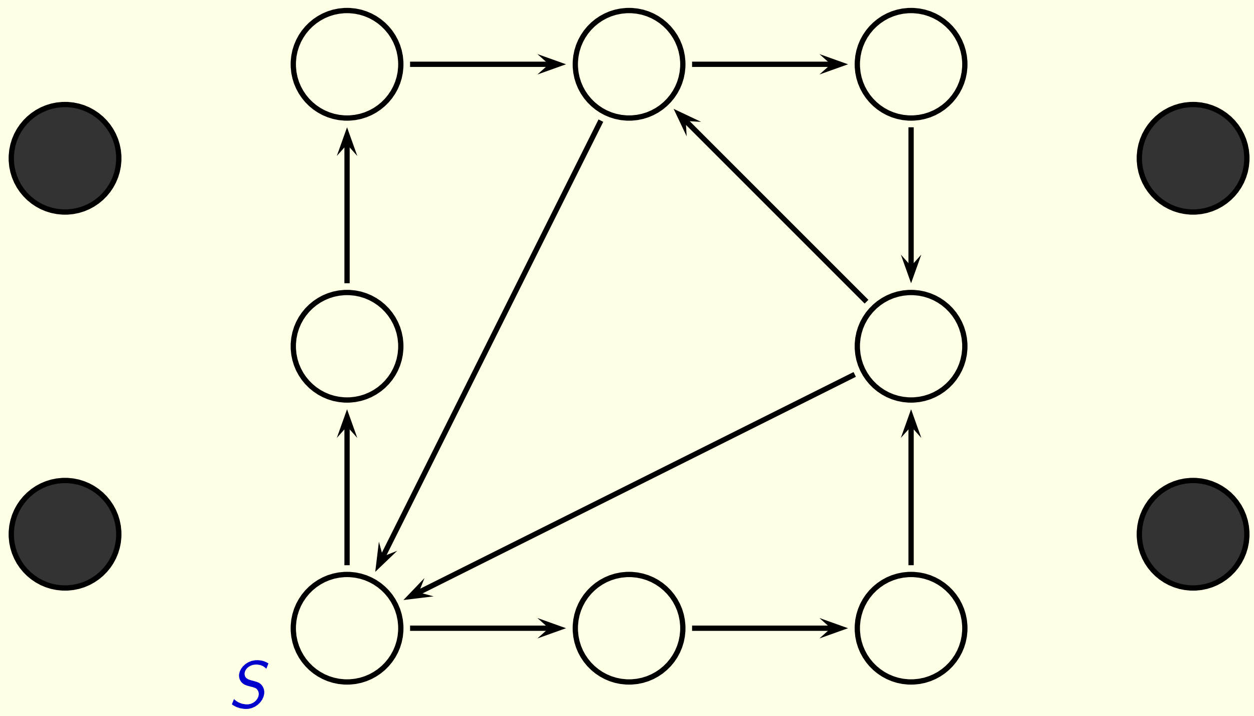
Beispiel: Handy

Dann ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man S **nicht** erreichen kann.



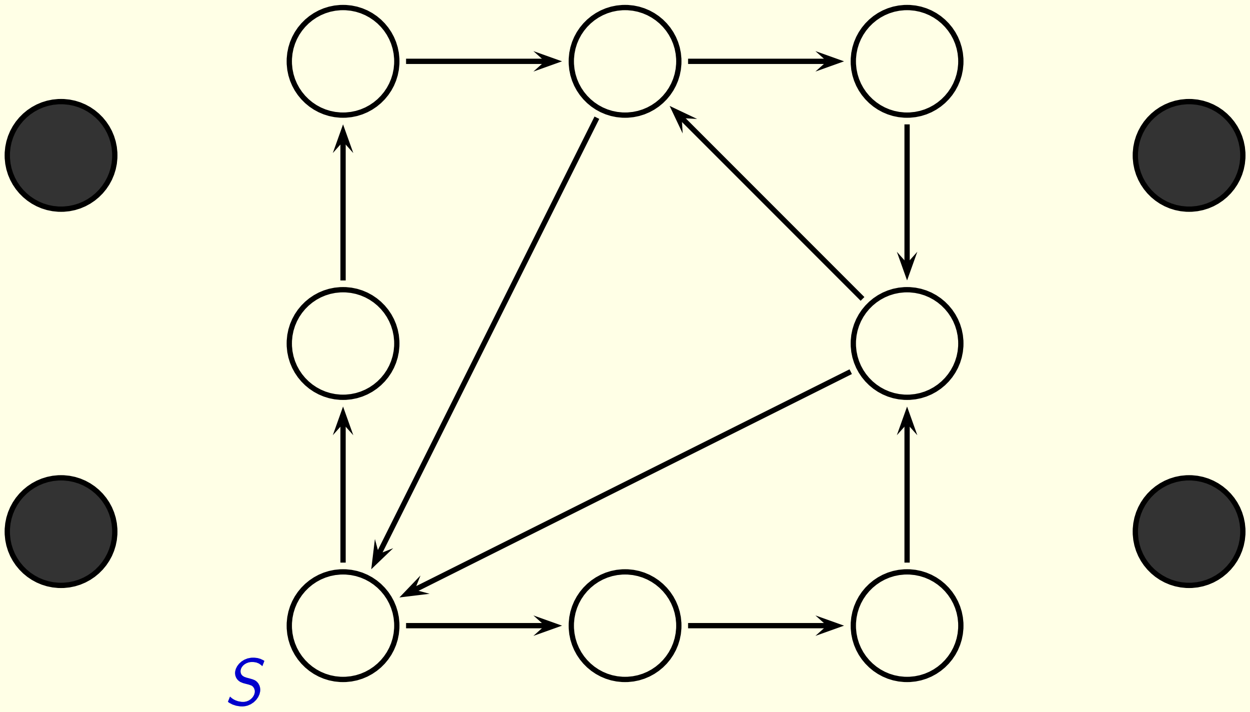
Beispiel: Handy

Zum Schluß ermitteln wir alle Zustände, von denen aus man einen grauen Zustand erreicht. (Das sind aber gerade die grauen Zustände selbst.)



Beispiel: Handy

Da der Zustand S **nicht** zu diesen Zuständen gehört, wissen wir nun, daß wir von S aus keine Sackgasse erreichen.



Wege und Kreise in Graphen

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und seien $u, v \in V$.

(1) u und v heißen benachbart, wenn $(u, v) \in E$.

(2) Ein Weg von u nach v ist eine Folge jeweils benachbarter Knoten

$$u_0, u_1, \ldots, u_l \qquad \text{mit } u_0 = u \text{ und } v = u_l.$$

Die Länge dieses Weges ist l; u und v sind seine Endknoten

(Ein Weg der Länge 0 besteht nur aus einem Knoten (trivialer Weg))

(3) Ein Weg von u nach v heißt geschlossen, wenn $u = v$

Wege und Kreise in Graphen

Definition. Zwei Knoten u und v eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißen zusammenhängend, wenn es in G einen Weg von u nach v gibt.

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, und sei $Z \subseteq V \times V$ die Zusammenhangsrelation über die Knotenmenge V von G.

Dann ist Z eine Äquivalenzrelation.

Wege und Kreise in Graphen

Definition.

(1) Der Graph $G = (V, E)$ heißt zusammenhängend, wenn die Zusammenhangsrelation lediglich eine Äquivalenzklasse besitzt,

d.h. wenn jedes Paar seiner Knoten zusammenhängend ist.

(2) Die Äquivalenzklassen einer Zusammenhangsrelation über einem ungerichteten Graphen G heißen Zusammenhangskomponenten von G.

Wege und Kreise in Graphen

Definition.

(1) Als Pfade werden Wege in einem Graphen bezeichnet, bei denen keine Kante zweimal durchlaufen wird.

Ein geschlossener Pfad heißt Kreis.

(2) Ein einfacher Pfad ist ein Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird.

Ein geschlossener Pfad, der mit Ausnahme seines Ausgangpunktes einfach ist heißt einfacher Kreis.

(3) Ein einfacher Kreis durch sämtlicher Knoten des Graphen, heißt Hamilton'scher Kreis.

Graphen und Matrizen

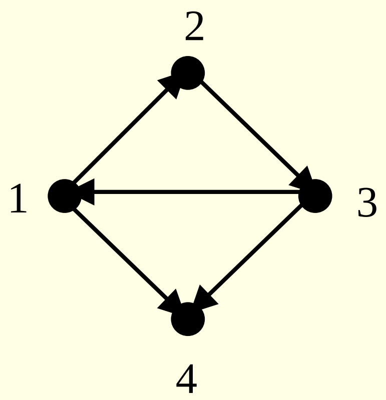
Definition. Sei $G = (V, E)$ ein (gerichteter) Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Die $n \times n$ Matrix $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

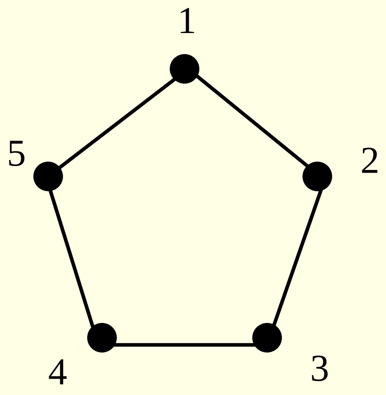
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{falls } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

heißt Adjazenzmatrix von G.

Beispiele

(1) 

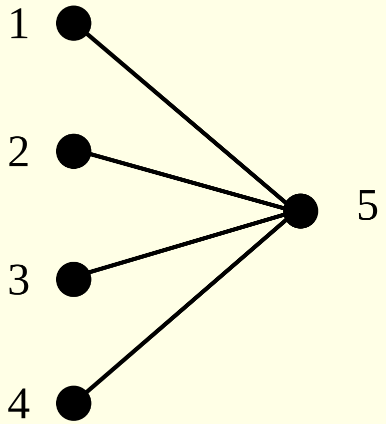
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

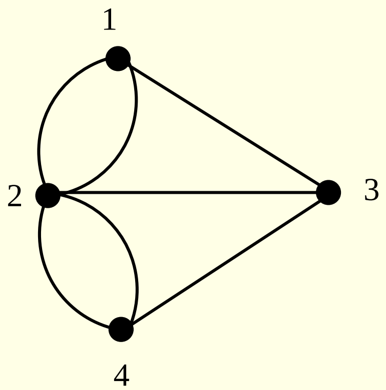
Beispiele

(3)



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

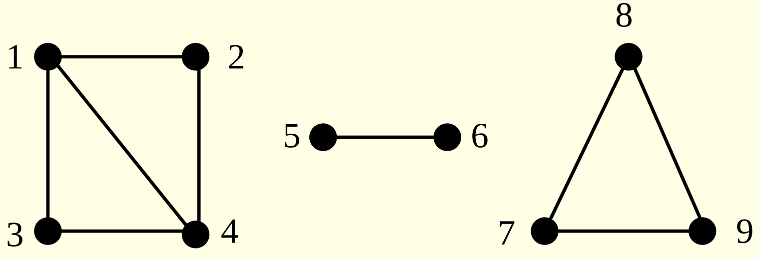
(4) Multigraph: $a_{ij} =$ Anzahl der Kanten, die von v_i nach v_j führen.



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele

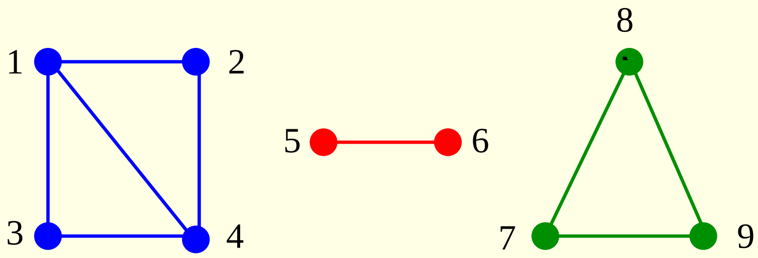
(5)



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

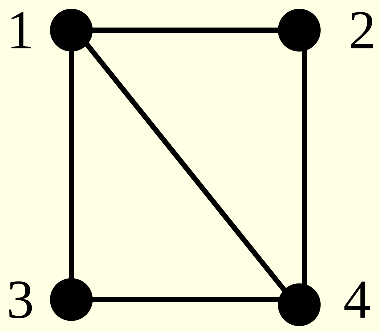
Beispiele

(5)



$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

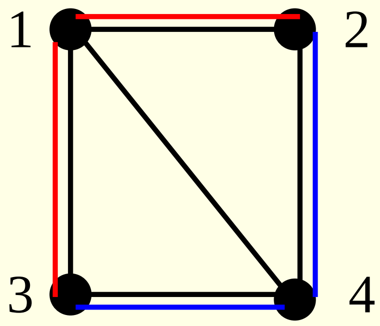
Beispiele



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_G \cdot A_G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiele



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_G \cdot A_G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \mathbf{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Graphen und Matrizen

Satz. Sei G ein Graph mit Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ seine Adjazenzmatrix. Für jede natürliche Zahl k gibt der Koeffizient b_{rs}, $1 \le r, s \le n$ der k-ten Potenz von A

$$A^k = (b_{rs})_{1 \le r,s \le n}$$

die Zahl der Wege der Länge k in G an, die von v_r nach v_s führen.