

Zusammenfassung

- **Grundlagen**

Logik, Mengen, Relationen,
Folgen & Mengenfamilien, Kardinalitäten

- **Techniken**

Mathematisches Beweisen, Induktion,
Kombinatorische Beweise

- **Strukturen**

Graphen

Grundlagen: 1. Logik

- Aussagen und Aussagenformen
 - Wahrheitstabellen; Tautologien und Kontradiktionen
 - Logische Äquivalenz
- Prädikate und Quantoren

2. Mengen und Mengenoperationen

- Geschichte: Russell'sches Paradox;
Klassen und Mengen; Axiomatische Mengenlehre
- Begriffe (Menge, Element, Kardinalität)
- Darstellung mittels definierenden Eigenschaften;
Gleichheit von Mengen
- Komplementäre Mengen, Leere Menge, Allmenge,
Teilmenge und Obermenge
- Potenzmenge und Mengenfamilien
- Mengenoperationen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenz);
Eigenschaften
- Produkt von Mengen

3. Relationen

- Definitionen; Nullrelation, Allrelation, Gleichheitsrelation, Identitätsrelation
- Operationen: Mengenoperationen, Inverse, Komposition, Inneres Produkt
- Operationen auf Relationen: Eigenschaften (\circ und Inverse; \circ und Mengenoperationen)
- Wichtige Eigenschaften von Relationen (Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Nacheindeutigkeit)
 - Charakterisierung mittels Inverse, Komposition
 - Abschluss einer Relation bezüglich einer Eigenschaft (reflexiver, transitiver, symmetrischer Abschluss)

Relationen

- Äquivalenzrelationen
 - Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen
 - Rechnen mit Äquivalenzrelationen
 - die durch R über A induzierte Äquivalenzrelation
- Halbordnungsrelationen
 - maximale/minimale Elemente; obere/untere Schranke; Supremum/Infimum; Maximum/Minimum
 - Kette, maximale Kette; Maximalkettenprinzip
 - wohlfundierte Halbordnungen
 - Ordnungsrelationen (totale Ordnungen)

Relationen

- Abbildungen und Funktionen
 - linksvollständige Relationen, rechtseindeutige Relationen
 - Abbildungen, Graph einer Abbildung;
 - Bild, Urbild, Wertebereich (Eigenschaften)
 - Einschränkung; Komposition
 - Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Folgen und Mengenfamilien

4. Kardinalitäten

- gleichmächtige Mengen
- abzählbar unendliche; abzählbare Mengen; Beispiele: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}
- überabzählbare Mengen; Beispiele: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(0, 1)$, \mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind nicht abzählbar.

- Gleichmächtigkeitsrelation \mapsto Kardinalitäten

endliche Kardinalitäten: 0, 1, 2, 3, 4, ...

unendliche Kardinalitäten:

\aleph_0 : Kardinalität der unendlichen abzählbaren Mengen

$\hat{\ }:$ Kardinalität der reellen Zahlen

Techniken: 1. Mathematisches Beweisen

- Mathematische Aussagen
- Mathematisches Beweis
 - Axiomensystem, Inferenzregeln, Beweis
 - Beispiele: Aussagenlogik, Gleichheitslogik, Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen
- Grundlegende Beweisstrategien
 - Direkter Beweis; Beweis durch Kontraposition; Beweis durch Widerspruch
 - Äquivalenzbeweis
 - Beweis durch Fallunterscheidung
 - Aussagen mit Quantoren

2. Induktion

- Vollständige Induktion
 - Induktionssatz; Struktur von Induktionsbeweisen
 - Verallgemeinerte vollständige Induktion
 - Wohlfundierte Induktion
- Induktive Definitionen
 - Induktive Definition von Folgen
 - Induktive Definition von Mengen (Beispiele: Wörter, Formeln)
- Strukturelle Induktion

3. Kombinatorische Beweise

- Zählen
 - Summenregel, Produktregel
 - Abbildungsanzahl, Anzahl eindeutiger Abbildungen
 - Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge
- Grundlegende Zählprinzipien
 - Inklusions-Exklusionsprinzip
 - Dirichlets u. Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip
- Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten
 - Permutationen, k -Permutationen, Kombinationen
 - Pascal'sche Dreieck, Gleichungen
 - Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten

Strukturen: Graphen

- Gerichteter Graph, Ungerichteter Graph, Diagrammdarstellung
- Vollständige Graphen, Bipartite Graphen
- Teilgraph, induzierte Teilgraph
- Vereinigung, Komplement, Durchschnitt von Graphen
- Ausgrad, Ingrad eines Knoten; Euler's Formel
- Wege und Kreise in Graphen; Graphen und Matrizen